

SBI-publ.

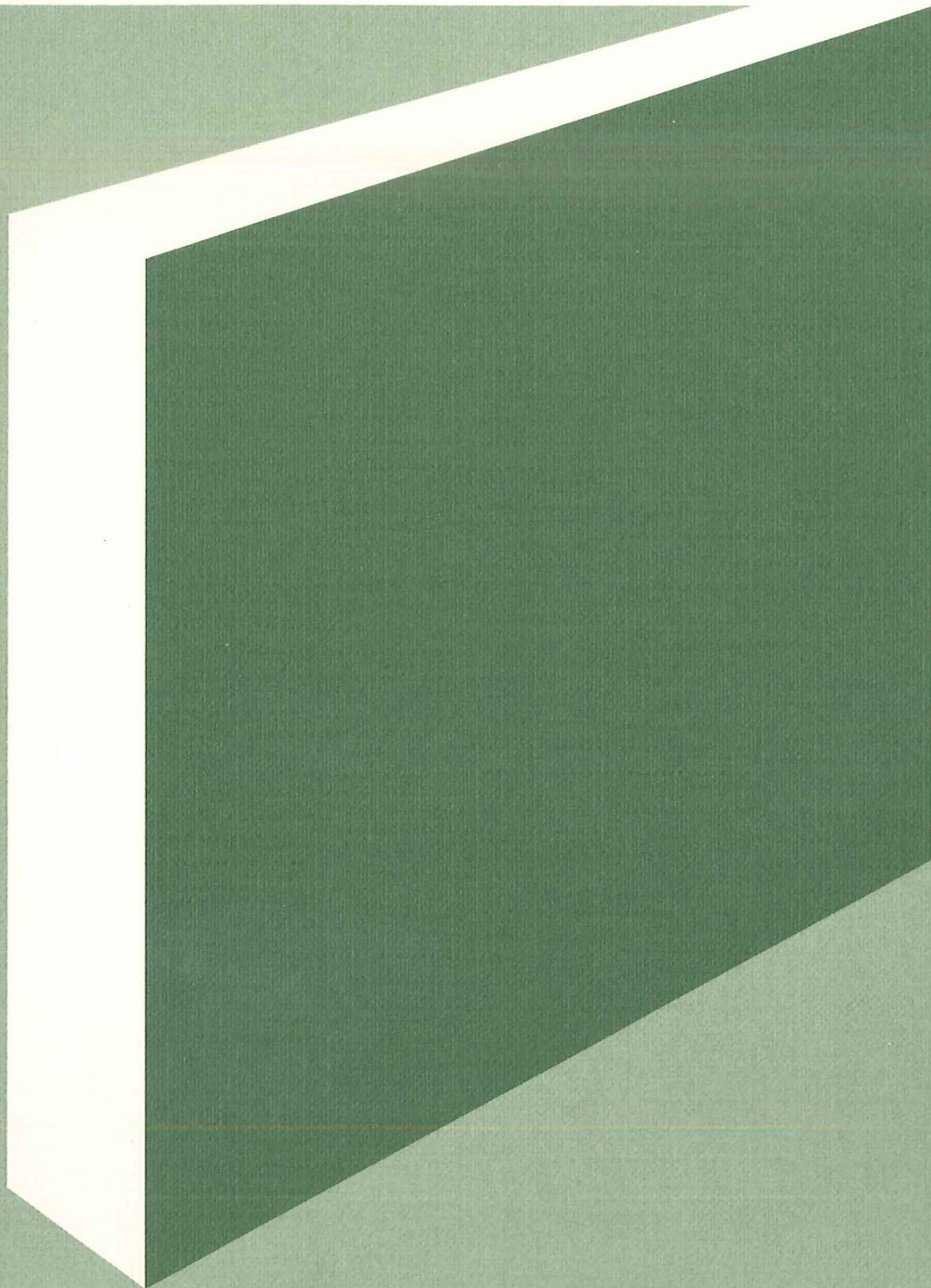
Skivebygningers stabilitet 1



Konstruktionsprincipper

Mogens Buhelt
Jørgen Nielsen
Jens E. Staalby

SBI-ANVISNING 82 · STATENS BYGGEFORSKNINGSINSTITUT 1976



Konstruktionsprincipper

MOGENS BUHELT

JØRGEN NIELSEN

JENS E. STAALBY



00678 P
STATENS BYGGEFORSKNINGSINSTITUT

EX. 2
- 8 OKT. 1976

Indhold

Forord.....	side 5
Indledning.....	side 6
Om begrebet »skivebygninger«, 6	
Om begrebet »stabilitet«, 6	
Anvisningernes formål, 8	
Anvisningernes indhold, 9	
Plane skiver.....	side 11
Skivemodellen, 11	
Skivekræfter, 11	
De statiske betingelser, 11	
Opbygning af en skivekonstruktion i stabil ligevægt, 12	
Den statisk ubestemte skivekonstruktion, 14	
Nogle anvendelser.....	side 17
Stabel af statisk bestemte skivekonstruktioner, 17	
Statisk bestemte skivekonstruktioner med indskudte vægge, 19	
Indstemmede trapper, 27	
Vurdering af en forelagt skivekonstruktion, 30	
Spændingsfordeling i plane skiver.....	side 34
Elasticitetsteori kontra plasticitetsteori, 34	
Stringermodellen, 35	
Rektangulære forskydningsfelter, 35	
Firkantede forskydningsfelter af vilkårlig form, 41	
Krumme skiver.....	side 44
Stringermodellen for krumme skiver, 44	
Cylinderflader og kegleflader, 44	
Dobbeltkrumme skiver, 52	
Krumme fladers anvendelighed som kraftoverførende skiver, 57	
Krumme skiver med åbninger, 58	
Sammenfatning.....	side 60
Litteratur.....	side 64

I 1967 iværksatte SBI nogle omfattende eksperimentelle, teoretiske og regnetekniske opgaver vedrørende sammensatte tværvægges mekanisme og bæreevne, emner af betydning for den videre udvikling af elementbyggeriet. Opgaverne blev planlagt, udført og løst i nært samarbejde med DIAB, København, og bkf-centralen. I perioden 1971 til 1975 har SBI udgivet tre rapporter om forsøgsresultaterne, deres fortolkning og anvendelse samt brugervejledninger til de to edb-programmer, der er udviklet som led i løsningen af de regnetekniske opgaver.*

Allerede før opgaverne var afsluttet med disse publikationer, blev det besluttet at publicere resultaterne i en større sammenhæng, dels med resultaterne af andre forskningsprojekter og erfaringer fra praksis, dels med en generel teori for udformning og beregning af skivekonstruktioner.

Et første udkast til en sådan udgivelse i SBIs anvisningsserie forelå i 1970 og dannede grundlaget for en teknisk samtale med deltagelse af ca 70 interesserede ingeniører og arkitekter, som fremkom med værdifuld kritik og forbedringsforslag.

Manuskriptet har herefter i flere dele og tempi været udsendt og underkastet en løbende revision og kritik.

Især må fremhæves de mange ændringer og forbedringsforslag, der er fremkommet fra lærerne ved Kunstakademiets Arkitektskole hhv Institutet for

Husbygning, DtH, på grundlag af erfaringerne ved anvendelse af dele af de foreløbige manuskripter i undervisningen.

Skivebygningers stabilitet udsendes efter mange omarbejdninger i sin endelige form som to SBI-anvisninger. En planlagt tredje publikation med kommenterede eksempler på betonelement-samlinger foreligger i manuskript, men da den henvender sig til en snævrere kreds, vil den ikke blive udsendt som anvisning, men på anden måde.

Den første anvisning, *Skivebygningers stabilitet 1 - Konstruktionsprincipper*, er udarbejdet af docent, civilingeniør Jørgen Nielsen, Kunstakademiets Arkitektskole, i samarbejde med civilingeniør Jens E. Staalby og akademiingeniør Mogens Buhelt. Den beskriver det teoretiske grundlag for udformning af skivekonstruktioner i stabil ligevægt, uafhængigt af de anvendte materialer. Udgangspunktet for denne anvisning er docent Jørgen Niensens forelæsningsnotater. Den henvender sig i første række til arkitekter og ingeniører, som beskæftiger sig med udarbejdelse af projektforslag for bygningskonstruktioner. Den er endvidere skrevet med henblik på anvendelse som lærebog.

Den efterfølgende anvisning, *Skivebygningers stabilitet 2 - Beregningsmetoder*, omhandler hovedsageligt konstruktioner af betonelementer. Den gennemgår en række metoder for analyse og beregning af skivebygninger udsat for forskellige påvirkninger, og under hensyntagen til elementsamlingernes udformning og egenskaber. Den er udarbejdet af en gruppe medarbejdere ved SBI og bkf-centralen under redaktion af civilingeniør Jens E. Staalby, og den henvender sig hovedsagelig til projekterende ingeniører. Også denne anvisning er skrevet med henblik på anvendelse som lærebog.

En lang række sagkyndige uden for SBI har ydet en uvurderlig hjælp ved kritisk gennemlæsning og kommentering af de forskellige udgaver af manuskripterne til anvisningerne om skive-

bygningers stabilitet. SBI benytter denne lejlighed til at takke alle, der har medvirket på denne måde.

August 1976
Per Bredsdorff

* Brugervejledning for NARC. Et sæt edb-programmer for løsning af opgaver inden for kontinuumsmekanikken ved elementmetoden. SBI 1971. Sources of Error by Strain Gage Measurements on Models Made of Plexiglas. Mogens Buhelt. SBI-rapport 68. 1971.

Brugervejledning for SHEWALS. Et edb-program til beregning af afstivende vægssystemer. SBI. 1973. Beregning af vægssystemer i skivebygninger. Mogens Buhelt og Klavs Feilberg Hansen. SBI-rapport 91. 1974.

Diagrammer til tilnærmet beregning af afstivende vægge. Klaus Hansen og S.Ø. Olesen. SBI-rapport 92. 1975.

Indledning

Denne publikation er den første af to SBI-anvisninger om skivebygningers stabilitet. De to anvisninger har undertitlerne *Konstruktionsprincipper* og *Beregningsmetoder*. Henvisninger i teksten sker ved benyttelse af betegnelserne: SS1-Konstruktionsprincipper, SS2-Beregningsmetoder.

Om begrebet »skivebygninger«

De bærende konstruktioner i de bygningstyper, der beskrives i anvisningerne, består af vægge og dæk. Disse konstruktionselementer er karakteristiske derved, at to af deres tre dimensioner er væsentligt større end den tredje. De er udpræget flade elementer.

For påvirkninger på tværs af deres eget plan siges elementerne at virke som *plader*, se figur 1. For påvirkninger i deres eget plan siges elementerne at virke som *skiver*.

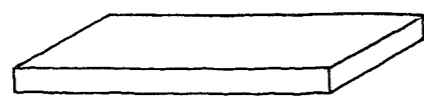
Vægge og dæk er meget stivere, når de påvirkes som skiver, end når de påvirkes som plader, se figur 2. Det er derfor fordelagtigt at udforme en bærende konstruktion, der skal afstive en bygning, på en sådan måde, at kræfterne i videst mulig udstrækning optages ved skivevirkning. Bygninger, hvis stabilitet er baseret på dette princip, betegnes *skivebygninger*.

Om begrebet »stabilitet«

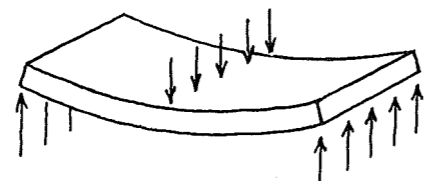
Man siger, at en bygning er stabil, når de enkelte bygningsdele 1) er i stabil ligevægt, og 2) kan holde til de kræfter, de er påvirket af.

En bygningsdel er i *stabil ligevægt*, når der kræves et positivt arbejde for at foretage en flytning af bygningsdelen. Hvis der ikke kræves noget positivt arbejde for at foretage en sådan flytning, siges bygningsdelen derimod at være *bevægelig*, se figur 3.

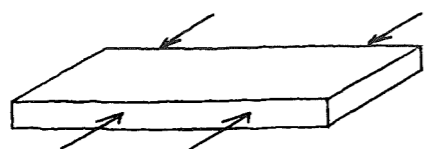
Når alle bygningsdelene i en bærende konstruktion er i stabil ligevægt, er selve bygningen det også.



Plade eller skive ?

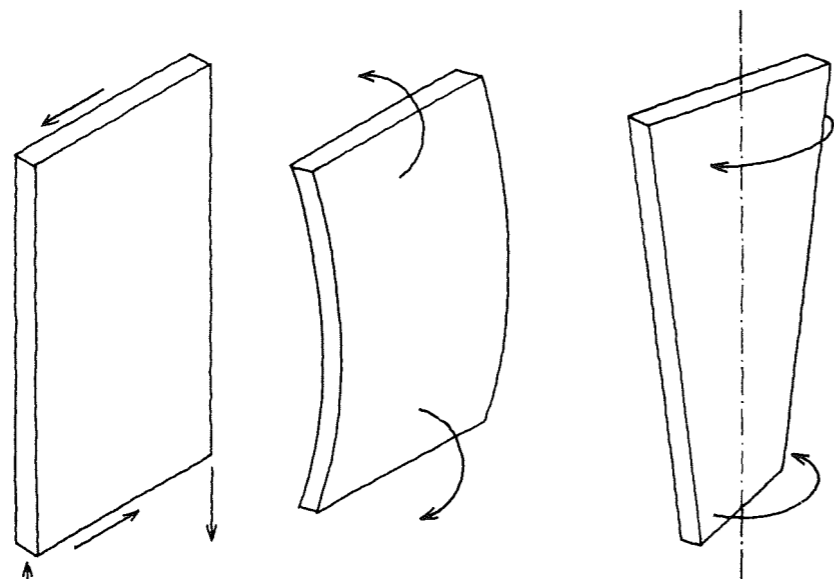


Plade !



Skive !

Figur 1. Det afhænger af belastningsretningen, og ikke af elementets udformning, om et »todimensionalt« element er en plade eller en skive.



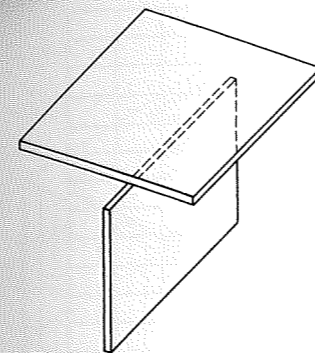
Skivevirkning

Pladevirkning (bøjning)

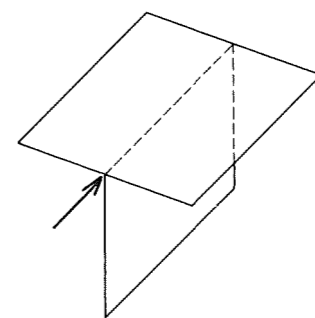
Pladevirkning (vridning)

Figur 2. De elementer, der indgår i en skivebygning, er meget stivere for påvirkninger i deres eget plan end for andre påvirkninger. Normalt er også bæreevnen størst for påvirkninger i elementernes eget plan. Bæreevnen i

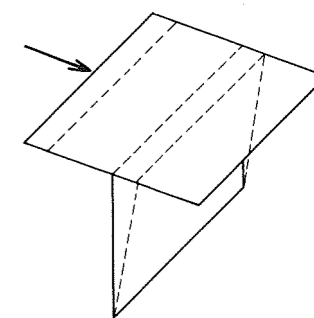
skiveplanet (skivevirkningen) udnyttes derfor til at sikre hele bygningens stabilitet, mens bæreevnen på tværs af skiveplanet (pladevirkningen) benyttes til at føre vindlast og nyttelast hen til de afstivende skiver.



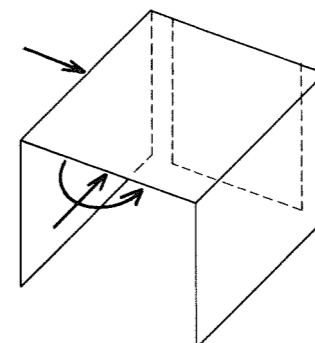
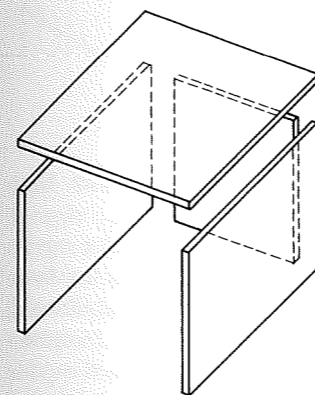
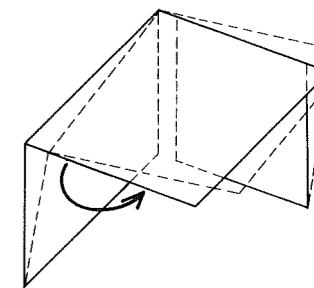
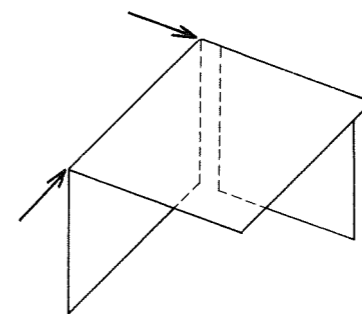
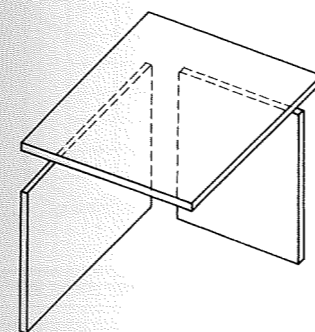
Hvis dækskiven har 1 fast støttelinie er den bevægelig



Hvis dækskiven har 2 faste støttelinier er den bevægelig



Hvis dækskiven har 3 faste støttelinier er den stabil

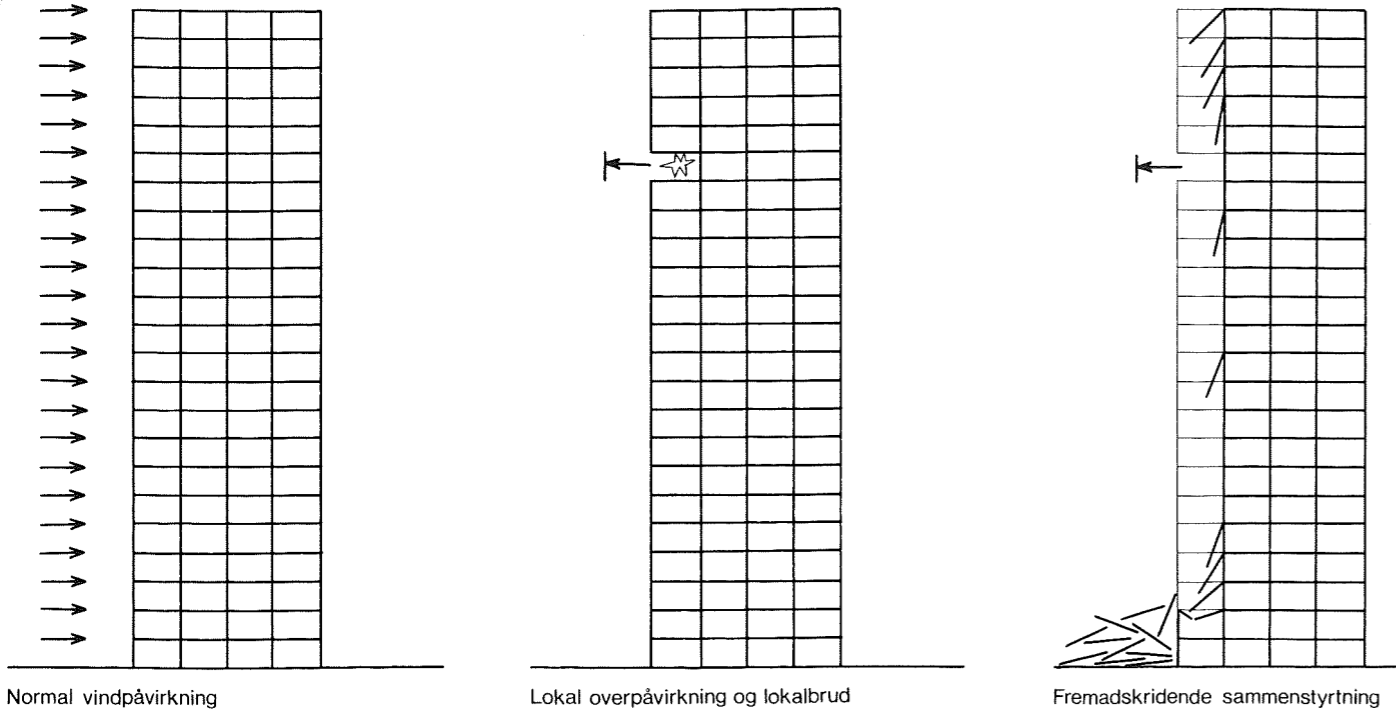


Figur 3. Tre forskellige skivekonstruktioner, bestående af ét dæk og én, to eller tre vægge. Konstruktionerne belastes i dækskivens plan.

I den øverste konstruktion skal belastningen føres ned til væggenes fod ved skivevirkning i væggen. Det kan kun lade sig gøre, hvis belastningens resultant ligger i vægskivens plan. Alle andre belastninger vil – uanset hvor små de er – forårsage bevægelse af konstruktionen. Konstruktionen er derfor bevægelig.

I den næste konstruktion er der to vægskiver, som kan føre belastningen ned. Dette er tilstrækkeligt, hvis belastningen kan opløses i komponenter, som ligger i disse to skivers plan. Alle andre belastninger vil – uanset hvor små de er – forårsage bevægelse af konstruktionen, som derfor er bevægelig.

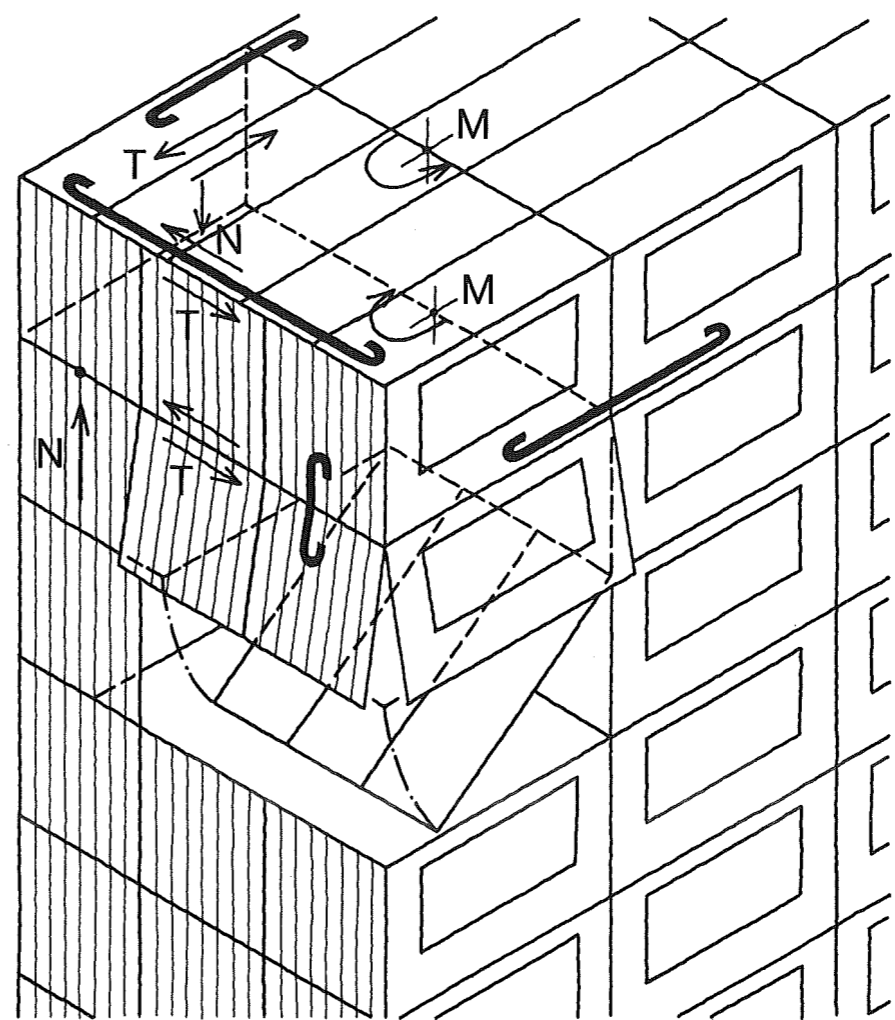
I den nederste konstruktion er der tre vægskiver, som er således placeret, at et vilkårligt kraftsystem i dækskivens plan kan optages (forudsat at skiver og samlinger kan holde til påvirkningerne). Denne konstruktion er derfor i stabil ligevægt.



Figur 4. I de to anvisninger behandles skivebygningers stabilitet over for såvel de normale, ydre laster som over for de ekstraordinære,

lokale overpåvirkninger. For de lokale overpåvirkningers vedkommende gives vejledning til undgåelse af, at et opstået lokalbrud for-

planter sig til større, tilgrænsende dele af konstruktionen.



Figur 5. Ved at acceptere, at lokalbrud kan opstå, kan man indtage en konstruktiv holdning til problemet. På figuren er indtegnet nogle af de normalkræfter (N), momenter (M) og forskydningskræfter (T), der opstår, når man i en skivebygning fjerner en del af en bærende ydervæg. De viste bøjler angiver zoner, hvor en god sammenhæng mellem de enkelte elementer er nødvendig, for at de opståede ekstrakræfter kan optages.

Anvisningernes formål

Formålet med de to anvisninger er at give retningslinjer og eksempler, der kan være en hjælp for projekterende arkitekter og ingeniører ved vurdering af skivebygningers stabilitet, både når det gælder bygningernes tilsigtede brug, og når det gælder om at begrænse følgerne af lokalbrud, se figur 4.

Eftervisning af spændinger og stabilitet

Gennem *Bygningsreglementet* [1] er det krævet, at alle bygninger skal projekteres i overensstemmelse med *Dansk Ingeniørforenings normer for bygningskonstruktioner*. I praksis skal det derfor eftervises, at den intakte bærende konstruktion er i stabil ligevægt, og at deformationer og materialespændinger i den ikke overstiger visse grænseværdier, når bygningerne udsættes for de normerede lodrette og vandrette lastpåvirkninger.

Hensigten med denne eftervisning er at sikre den *intakte bygnings* rette funktion under de *tilsigtede brugsbetingelser*, herunder bl.a. at sikre, at der ikke opstår brud i den bærende konstruktion.

Imidlertid kan det ske, at en bygning overgår til *anden brug* end den, den oprindelig var bestemt for. Derved kan de bærende bygningsdele blive kraftigere påvirket end før. Hvis en af disse bygningsdele påvirkes ud over sin bæreevne, opstår der brud i denne bygningsdel. Et sådant *lokalbrud* kan også opstå på grund af en voldsom hændelse som fx en gaseksplosion eller en påkørsel, eller som følge af fejl i projektet eller i udførelsen.

Ifølge DIF-normerne skal alle konstruktioner projekteres med en vis sikkerhedsmargin i den tilsigtede brugstilstand. Lokalbrud i bærende konstruktioner optræder derfor sjældent i praksis. Der er dog – statistisk set – ingen grænser for, hvor store påvirkninger en bygning kan blive udsat for; så uanset hvilken sikkerhedsmargin man ville vælge, ville man ikke kunne opnå absolut sikkerhed. Det må således accepteres, at der altid er en vis, lille mulighed for, at et lokalbrud opstår. Dog bør bygninger konstrueres med henblik på at sikre, at et opstået lokalbrud af nærmere defineret størrelse ikke medfører *fremadskridende sammenstyrning* (dvs forplanter sig til større dele af konstruk-

tionen), hvis det medfører risiko for omfattende tab af menneskeliv.

I mange tilfælde vil man derfor også eftervise spændinger og stabilitet for den pågældende bygning med et lokalbrud af en vis størrelse på det eller de mest kritiske steder. For bygninger med mere end seks etager er størrelsen af de lokalbrud, der skal betragtes, defineret i Bygningsreglementets pkt 5.2.2. For andre bygninger bør de projekterende indtil videre selv definere relevante størrelser af lokalbrud.

Konstruktionsprincipper

Efter sædvanlig praksis udformes langt de fleste bygninger således, at de *lodrette* lastpåvirkninger på den intakte bygning føres ned til jorden ved bjælkevirkning i dækkene og søjlevirkning i væggene. Dette medfører som regel ikke større problemer. Konstruktionselementernes bæreevner er normalt velkendte, og samlingerne udføres ofte ved at stable elementer oven på hinanden, således at der i samlingerne kun skal overføres trykkræfter.

De *vandrette* lastpåvirkninger: vindlast, masselast og evt jordskælvslast skal

også føres til jorden. I skivebygninger foregår dette gennem de samme elementer, som fører den lodrette last ned. Men den vandrette last må nødvendigvis fremkalde forskydningskræfter i væggenes planer: man må udnytte væggenes skivevirkning. Ofte udnyttes også dækkenes skivevirkning. I denne situation påvirkes samlingerne til både tryk, træk og forskydning. Afhængigt af materiale og byggemetode kan dette medføre større eller mindre problemer.

Skivevirkning kan også udnyttes til optagelse af *lodret* last, idet man kan *forskyde* lodrette kræfters angrebslinier og dermed eliminere den sædvanlige binding, at enhver bærende væg skal understøttes af enten en bærende væg eller en bjælke, som skal være placeret direkte under den pågældende væg. Dette princip byder på mange muligheder for en friere udformning af bygninger. Hidtil er det dog ikke udnyttet i større omfang i forbindelse med intakte konstruktioner.

Virkningerne af et lokalbrud i en bygning kan i mange tilfælde begrænses ved at indbygge alternative muligheder for kræfternes nedførsel til jorden; muligheder som kan træde i funktion,

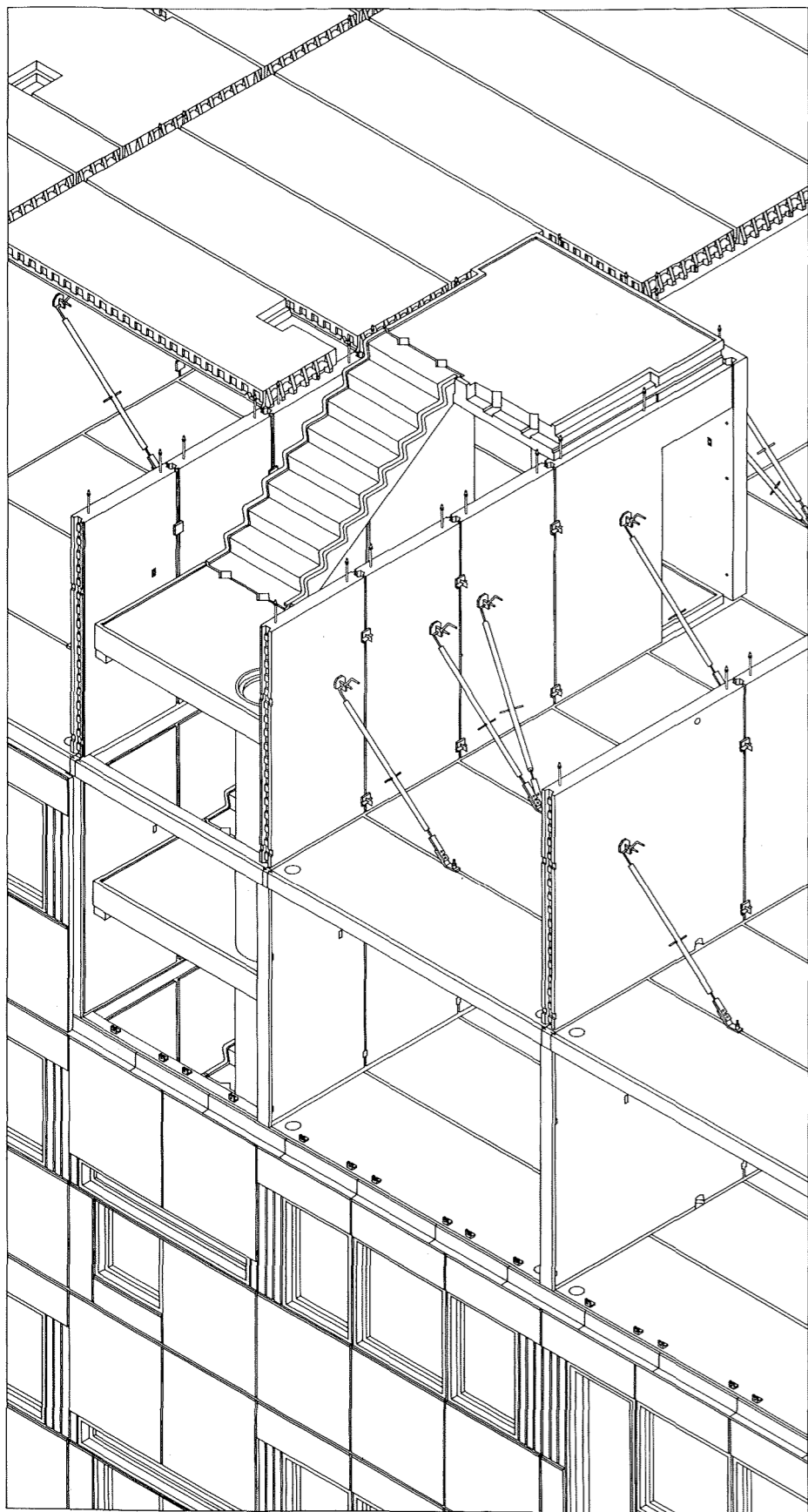
hvis den direkte mulighed forsvinder. Her kan det oven for nævnte princip anvendes. Hvis en bærende væg i en etage af en skivebygning forsvinder, er der ofte gode muligheder for at føre de lodrette kræfter uden om brudstedet ved hjælp af skivevirkning i vægge og dæk, se figur 5. Denne nye virkemåde stiller naturligvis helt andre krav til elementerne, og især til samlingerne mellem elementerne, end den oprindelige virkemåde i den intakte bygning. Men kravene kan ofte opfyldes inden for rimelige økonomiske rammer.

Disse to anvisninger skulle gerne tjene til at fremme en *skivetankegang*, en bevidstgørelse om skivevirkningens allerede delvis udnyttede muligheder. Ved at tænke i skiver kan man vurdere en bygningens stabilitet, både i brugstilstanden og i en eventuel lokalbrudtilstand, helt fra bygningsplanlægningsens allerførste faser.

Anvisningernes indhold

Denne anvisning, SS1-Konstruktionsprincipper, viser gennem eksempler opbygningen af skivekonstruktioner i stabil ligevægt. Anvisningen beskriver endvidere, hvorledes snitkræfter og spændinger i simple skivekonstruktioner kan bestemmes ved hjælp af ligevægtsbetingelser og stringermodeller. Afslutningsvis redegøres for, i hvilken udstrækning krumme skiver kan anvendes til stabilisering af skivekonstruktioner på lige fod med plane skiver. SS1-Konstruktionsprincipper beskriver almentydige principper og knytter sig ikke til noget bestemt byggemateriale eller nogen bestemt byggeteknologi. En resumerisk gennemgang af anvisningens indhold findes i Sammenfatning bagest i bogen.

I SS2-Beregningsmetoder sker der en afgrænsning af emneområdet. Dels beskriver anvisningen beregning af spændinger og snitkræfter i skivebygninger med ens etager. Dels anvises bæreevnen af nogle gængs anvendte betonelementer og disses samlinger. I figur 6 er vist et eksempel på en bygning, som består af sådanne komponenter.



Figur 6. Situation fra montage af skivebygning med enkeltspændte dæk, bærende tværvægge og lette, ikke-bærende facader. Såvel dæk som vægge er af præfabrikerede betonkomponenter. Vægelementerne er midlertidigt afstivede. Dækelementerne er udført med et forlængt vederlag, der på én gang giver et sikkert vederlag og en rigelig udstøbningsbredde. Dækelementernes langsgående sider er for-

synet med fordybninger, de såkaldte forskydningslåse. Også vægelementernes lodrette sider er forsynet med forskydningslåse. På dækket i den etage, hvor de ikke-bærende facadeelementer er ved at blive monteret, ses vinkelbeslag til befæstelse af disse elementer. Vindbelastningen på facaden overføres via disse vinkelbeslag til dækket og herfra via dækkets forlængede vederlag til de tværfæstende vægge.

Plane skiver

Af praktiske grunde er de afstivende skiver i det industrialiserede skivebyggeri normalt udført som plane skiver. Der er dog principielt intet til hinder for, at også krumme skiver kan udnyttes som afstivende elementer til sikring af bygningsstabiliteten. For fuldstændighedens skyld skal der derfor i et senere kapitel gives en række eksempler på, hvordan krumme skiver kan benyttes som afstivende elementer til sikring af bygningsstabiliteten.

Skivemodellen

For at kunne vurdere en konstruktions stabilitet, er det som oftest nødvendigt at gøre en række forenkende antagelser om konstruktionens virkemåde. Det er således ikke den virkelige, fysiske konstruktion, der undersøges, men en model af denne.

Mens ét og samme konstruktions-element i praksis kan virke både som plade og som skive, er det for de efterfølgende mere teoretiske overvejelser praktisk at antage, at skiver virker uendeligt stive for kræfter i skiveplanet og uendeligt slappe for kræfter på tværs af skiveplanet. En model, hvis elementer udelukkende antages at virke som skiver, betegnes en skivemodel.

I praksis må de elementer, der skal virke som skiver, naturligvis have en vis bøjnings- og vridningsstivhed, dels for at kunne modstå trykpåvirkninger i skiveplanet uden at folde sammen, dels fordi de fleste skiver vil blive udsat for tilslaget eller utilsigtet tværbelastning, som de må optage ved pladevirkning, eventuelt samtidig med trykpåvirkningen i skiveplanet.

Skivekræfter

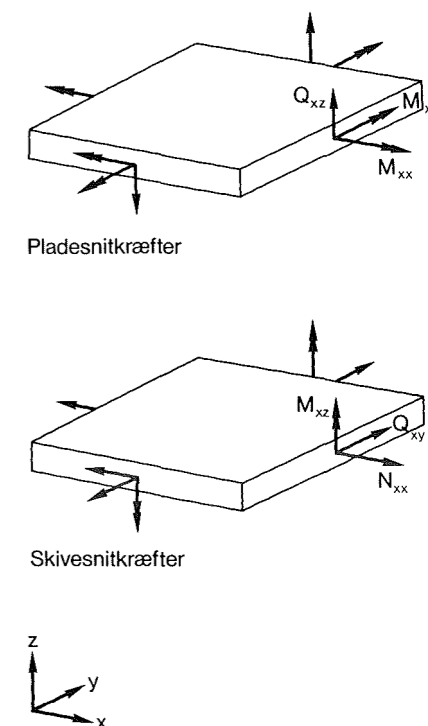
På grund af skivers manglende stivhed mod bøjning ud af deres plan må de sammenstilles til rumlige konstruktioner, for at de kan være i stabil ligevægt. Skiver sammenstilles ved, at man forbinder dem kant mod kant eller kant mod flade med kraftoverførende samlinger.

I ethvert snit i en rumlig konstruktion – og således også i en samling – kan

der principielt forekomme seks snitkraftkomponenter, nemlig et moment om hver af tre akser og en kraft i hver af de tre aksers retninger. Som vist på figur 7 kan de opdeles i tre pladesnitkræfter og tre skivesnitkræfter.

I en skive kan der på grund af den manglende stivhed mod bøjning og vridning kun optræde de tre skivesnitkræfter, som er de almindeligt kendte fra plane modeller: normalkraft, forskydningskraft og moment. Hvis snittet lægges i en samling mellem to skiver, der ikke ligger i samme plan, reduceres de mulige snitkræfter yderligere til en forskydningskraft. Det er den eneste komponent, der ligger i begge skivers planer.

Snitkræfterne mellem de enkelte skiver i en skivekonstruktion benævnes også *skivekræfter*, *randkræfter* eller, når en af skiverne betragtes i forhold til de øvrige, *reaktioner*.



Figur 7. Alle snitkræfter på et givet snit kan opløses i seks komponenter, nemlig to bøjningsmomenter, et vridningsmoment, to forskydningskræfter og en normalkraft. For flade elementer kan disse seks snitkraftkomponenter opdeles i pladesnitkræfter og skivesnitkræfter, svarende til elementets funktion ved påvirkning af disse kræfter. Momenter er angivet ved de akser, hvormed de drejer, forsynet med dobbelte pilespidser.

De statiske betingelser

De statiske betingelser (ligevægtsbetingelserne) er udførligt behandlet i den bygningstekniske statik, se fx [2], og skal derfor ikke forklares her. Blot kan det være på sin plads at præcisere, at det kraftsystem, der påvirker en skive, er plant ifølge skivedefinitionen, og at en skive derfor er i ligevægt, når blot ét af følgende tre sæt betingelser er opfyldt for de kræfter, inklusive understøtningsreaktioner, der påvirker skiven.

1) projektionssummen er nul på to ikke-parallele linier, og momentet er nul i et punkt af planen eller

2) momentet er nul i to punkter af planen, og projektionssummen er nul på en linie, der ikke er vinkelret på de to punkters forbindelseslinie eller

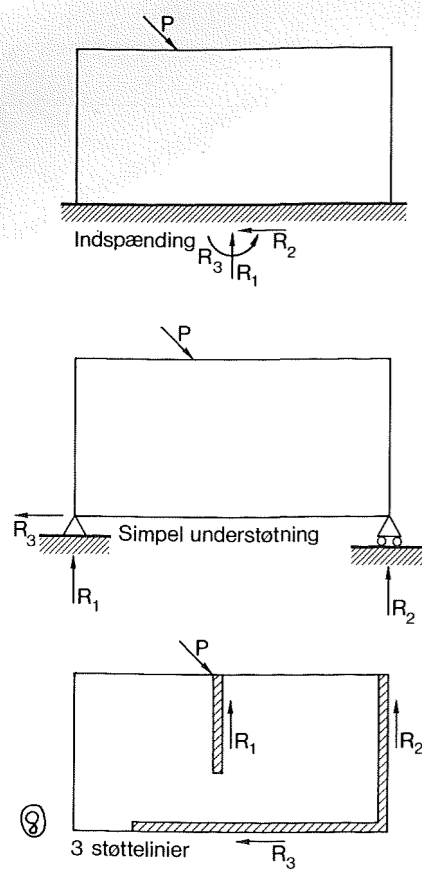
3) momentet er nul i tre punkter, der ikke ligger på en ret linie.

Disse betingelser kan benyttes til bestemmelse af understøtningsreaktionerne på en given skive, påvirket af et givet kraftsystem, når reaktionernes angræbslinier kendes. Tre almindelige understøtningsformer for en skive er vist i figur 8. Da hvert af ovenstående betingelsessæt indeholder tre betingelser, er det en nødvendig betingelse for en

entydig bestemmelse af reaktionerne for en vilkårlig, plan kraftpåvirkning, at der er tre reaktionskomponenter. Det er endvidere en betingelse, at hvis alle reaktionskomponenter er enkeltkræfter, må de ikke skære hinanden i samme punkt og ikke alle være parallelle. Hvis disse betingelser er opfyldt, er skiven statisk bestemt understøttet.

Hvis der er mindre end tre reaktionskomponenter, er skiven bevægelig, også i sit eget plan.

Hvis der er mere end tre reaktionskomponenter, som ikke alle går gennem samme punkt eller er parallelle, er skivens understøtning statisk ubestemt. Det vil sige, at skiven er ubevægelig i sit eget plan for en vilkårlig kraftpåvirkning i dette plan, men reaktionerne kan ikke bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene.



Figur 8. Tre eksempler på statisk bestemt understøtning af en skive. P betegner påvirkninger og R betegner reaktioner.

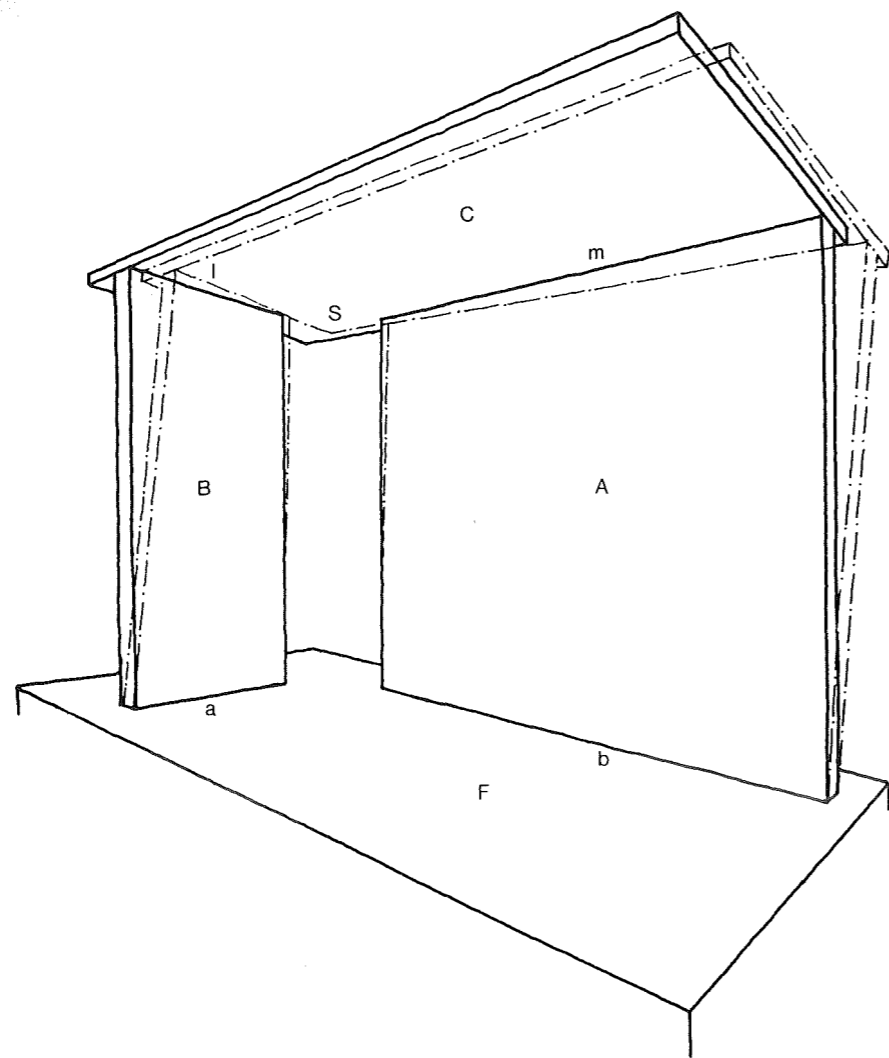
Understøttet på én af disse måder er skiven ubevægelig i sit eget plan. De to øverste understøtninger sikrer dog ikke skiven mod ud-bøjning vinkelret på skiveplanet. Hvis den nederste skives støttelinier også kan fastholde skiven mod bevægelser vinkelret på skiveplanet, siges støttelinierne at være faste. Skiven er da i stabil ligevægt.

Den simple understøtning kan også opfattes som en understøtning langs tre støttelinier, nemlig reaktionernes angrebslinier. Men disse støttelinier er ikke faste.

Det er imidlertid ikke tilstrækkeligt for stabil ligevægt, at en skive er ubevægelig i sit eget plan. Man må også sikre, at den fastholdes mod bevægelser ud af skiveplanet. Dette opnås ved at sammensætte skiver til skivekonstruktioner som beskrevet i det følgende.

Opbygning af en skivekonstruktion i stabil ligevægt

Princippet i opbygningen af en skivekonstruktion i stabil ligevægt forklares i det følgende ved hjælp af et eksempel. Eksemplet går ud fra en simpel skivekonstruktion, der vises at være bevæge-



Figur 9. Bevægelig skivekonstruktion, bestående af to vægskiver og en dækskive. Støttelinierne l og m er fastholdt i deres længderetning, således at deres skæringspunkt S er

lig. Derefter udbygges denne konstruktion, så den bliver stabil: først statisk bestemt og dernæst statisk ubestemt.

Eksempel 1. Opbygning af en simpel skivekonstruktion

Eksemplet tager sit udgangspunkt i et rumligt hjørne, opbygget af tre plane skiver, A , B og C , se figur 9. Skiverne A og B er forankrede til fundamentplanet F langs linierne a og b . De er således fastholdt mod drejning i deres egne planer. Skive C er fastgjort til skiverne A og B langs linierne m og l .

Heraf følger, at de punkter af skive C , der ligger på en af linierne l og m , ikke kan forskydes i vedkommende linies

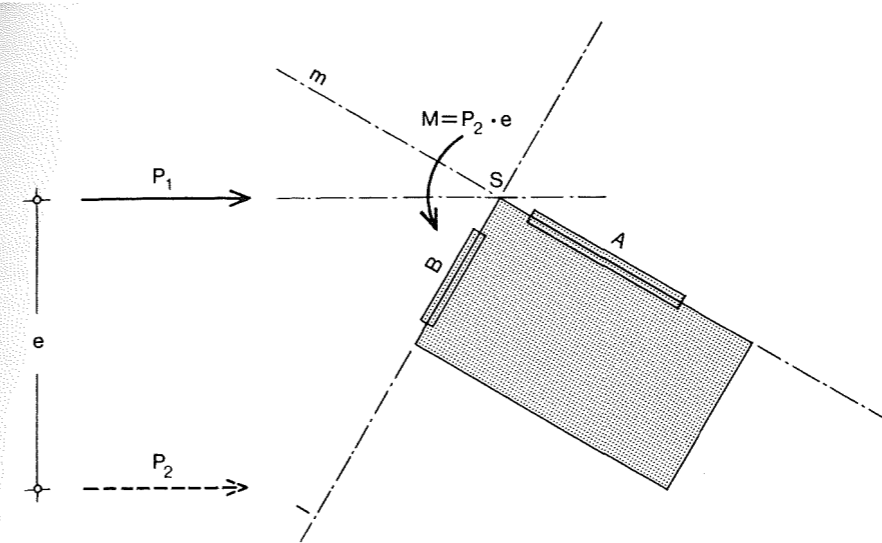
fastholdt. Der er derimod ikke noget til hinder for, at skive C kan drejes om dette punkt, da skiverne A og B er bøjningsslappe.

længderetning, hvilket igen medfører, at disse to liniers skæringspunkt S ligger fast.

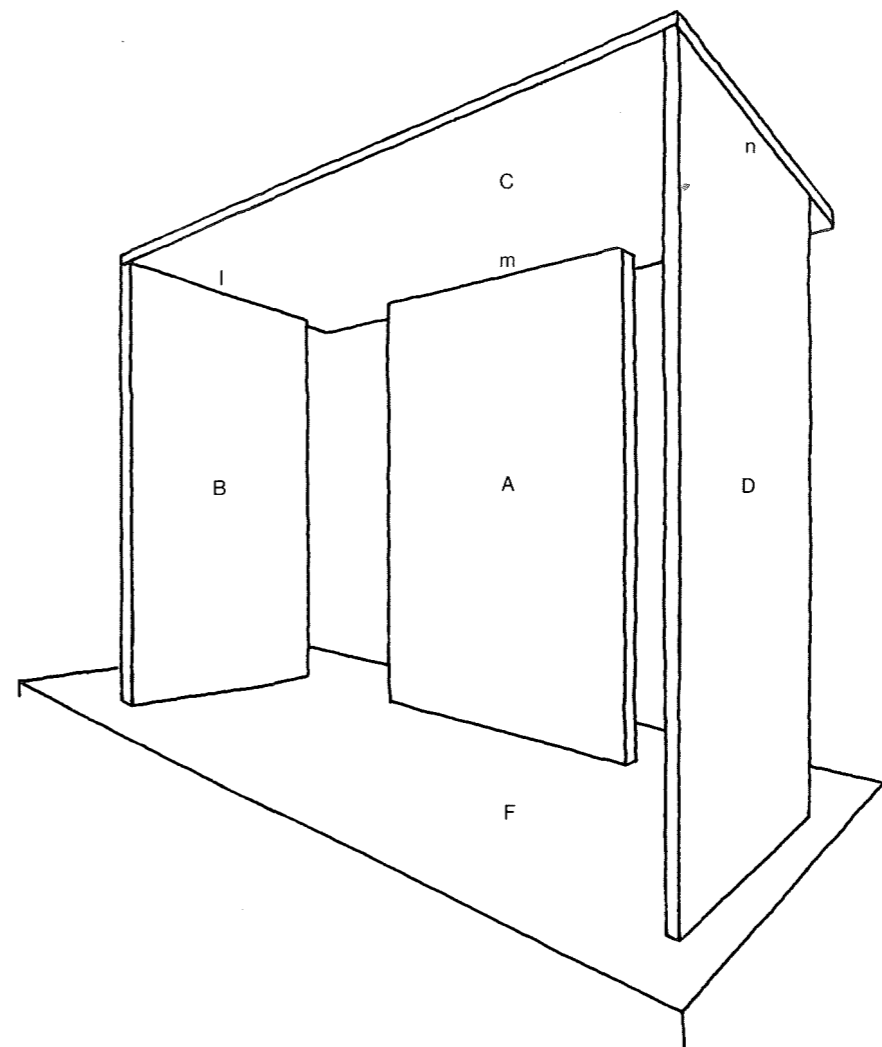
Da skiverne imidlertid er forudsat at være uendeligt bøjningsslappe, er skive C 's punkter på linie l eller m ikke fastholdt mod bevægelser vinkelret på vedkommende linie. Det medfører, at skive C kan dreje sig om punkt S som vist på figur 9.

Dækskiven C er altså bevægelig, og er derfor ikke i stabil ligevægt for en vilkårlig, vandret kraftpåvirkning.

Dette kunne også ses ved at opstille ligevægtsbetingelserne for skive C , se figur 10. Skiverne A og B kan præstere reaktioner, som støtter C langs linierne m og l .



Figur 10. Ligevægtsbetingelser for dækskiven i konstruktionen i figur 9. Skiven er således understøttet, at der kun er to reaktionskomponenter, beliggende i linierne m og l . En påvirkende kraft P_1 , hvis angrebslinie går gennem disse to liniers skæringspunkt S , kan opløses i komponenter i linierne m og l , og kan således holdes i ligevægt af reaktionerne. En kraft P_2 , hvis angrebslinie ikke går gennem S , kan ikke holdes i ligevægt af disse reaktionskomponenter. Skiven er derfor bevægelig.



Figur 11. Skivekonstruktion i stabil ligevægt, bestående af tre vægskiver og en dækskive. Vægskiverne fastholder støttelinierne m , l og n i deres længderetninger. De punkter af skive C , der ligger på en støttelinie, er således fastholdt mod bevægelser på langs ad denne. Det medfører, at støttelinierne to skæringspunkter ligger fast i skive C 's plan, således at skive C ikke kan bevæge sig i sit eget plan. Også skive C 's bevægelser på tværs af dette plan hindres af vægskiverne. Omvendt kan den således fastholdte dækskive hindre, at vægskiverne bevæges på tværs af deres plan.

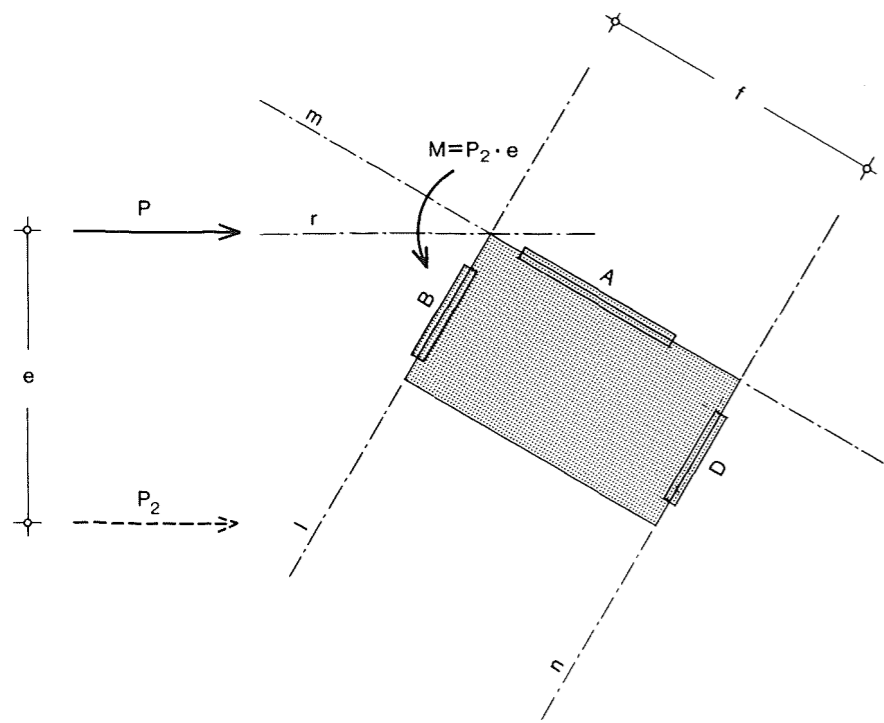
Først tænkes skiven påvirket af kraften P , som går gennem skæringspunktet S for linierne m og l . Kraften kan opløses i komponenter i disse to linier og således holdes i ligevægt af et sæt reaktioner. Skiven er derfor i ligevægt for denne last.

Dernæst tænkes skiven påvirket af kraften P_2 , som ikke går gennem skæringspunktet S . Kraften kan flyttes hen

i P_1 's angrebslinie, når der samtidig tilføjes et moment M lig kraften, P_2 , gange angrebslinierne indbyrdes afstande, e . Mens den flyttede kraft – som før – kan opløses i komponenter i linierne l og m , ses det, at det tilføjede moment, $M = P_2 \cdot e$, ikke kan erstattes af kræfter i disse linier. Da skive C således ikke kan optage en vilkårlig kraft i sit eget plan, er den bevægelig.

Linierne l og m er faste støttelinier for skive C , jf figur 8.

Indføres en tredje vægskive i den bevægelige konstruktion, ses det, at denne nu bliver ubevægelig, se figur 11. Som før det ene skæringspunkt lå fast, ligger nu også det andet skæringspunkt fast, og dækskiven C er hindret i at bevæge sig i sit eget plan. Endvidere hindrer vægskiverne, at C bevæger sig på tværs af sit



Figur 12. Ligevægtsbetingelser for dækskiven i konstruktionen i figur 11. Skivens understøtning svarer til tre reaktionskomponenter, beliggende i linierne m , l og n . Skiven er påvirket af en vilkårlig kraft P_2 i skivens plan (den punkterede pil). Denne kraft flyttes hen i linien r ved tilføjelse af momentet M . P kan derefter opløses i komponenter i linierne m og l , og M kan erstattes af to modsat rettede kræfter af størrelsen $P_2 \cdot e/f$ i linierne l og n . Den vilkårlige ydre kraft er hermed opløst i komponenter i de tre faste støttelinier og kan altså føres ned til fundamentet.

eget plan. Omvendt forhindrer den således fastholdte dækskive, at vægskiverne bevæger sig på tværs af deres egne planer. Vægskivernes bevægelse i deres egne planer hindres af indspændingerne i fundamentplanet.

Konstruktionen er således ubevægelig, hvilket også kunne ses ved at vise, at en vilkårlig kraftpåvirkning på konstruktionen kan optages og overføres til fundamentplanet. Da konstruktionen opfattes som en skivekonstruktion, er det dog en forudsætning, at kraftpåvirkningen består af kræfter, som angriber gennem konstruktionens støttelinier (hjørnesamlinger). Et sådant kraftsystem kan opløses i kræfter i skivernes planer, og det er derfor tilstrækkeligt at vise, at en vilkårlig kraft i hver enkelt skives plan kan optages.

På figur 12 antages skive C således at være påvirket af kraften P_2 . Skiverne A , B og D kan præstere reaktioner, der angriber skive C langs linierne m , l og n , som ikke alle er parallelle, og som ikke skærer hinanden i samme punkt. Som tidligere nævnt er skive C da statisk bestemt understøttet.

Kraften P_2 parallelforskydes, således at den går gennem skæringspunktet for linierne m og l , og kan derefter opløses efter disse linier. Samtidig med parallelforskydningen må der tilføjes et moment $M = P_2 \cdot e$, som dog kan erstattes af et kraftpar i linierne l og n . Den vilkårlige ydre kraftpåvirkning er hermed opløst i linierne m , l og n , og kan derfor optages af vægskiverne.

Når kraften er ført ned i vægskiverne, føres de videre ned i fundamenterne, idet vægskiverne er indspændte i fundamentplanet, og således statisk bestemt understøttede, jf figur 8 øverst.

Kræfter, der virker i vægskivernes planer, føres direkte af vedkommende vægskive til fundamentplanet.

Det ses heraf, at konstruktionen umiddelbart er i stabil ligevægt for alle kræfter, som kan opløses i komponenter, der udelukkende er beliggende i skivernes planer. Andre kræfter må først ved pladevirkning føres ud til støttelinierne, inden de kan optages af skivemodellen.

Det ses endvidere, at alle de kræfter, der påvirker hver enkelt skive i konstruktionen, kan bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene. Konstruktionen siges derfor at være statisk bestemt.

Konstruktionens stabilitet vil principielt ikke anfægtes, dersom én eller flere af vægskiverne er skråstillet som vist på figur 13.

Den statisk ubestemte skivekonstruktion

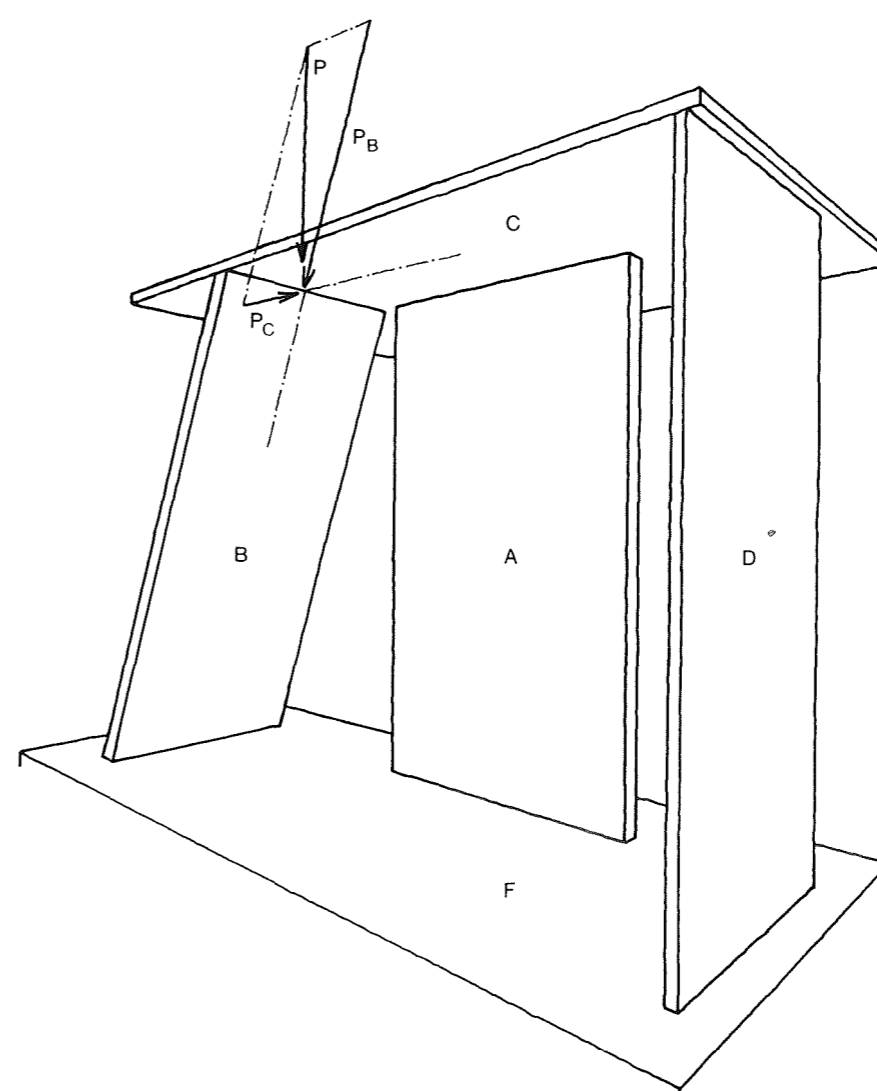
I de fleste skivekonstruktioner støder vægskiverne op til hinanden, og forbindes indbyrdes med kraftoverførende samlinger. En sådan konstruktion er vist i figur 14.

På samme måde som i den ovenfor beskrevne, statisk bestemte skivekon-

struktion ses det, at skive C er statisk bestemt understøttet. Man kan således for en vilkårlig kraftpåvirkning med angrebslinier gennem en af konstruktionens støttelinier (hjørnesamlinger) finde den resulterende kraftpåvirkning på hver af vægskiverne. Men hver vægskive er nu – foruden af de tre reaktionskomponenter fra indspændingen i fundamentplanet – påvirket af de ubekendte forskydningskræfter i de lodrette samlinger mellem vægskiverne. Vægskiverne er således *statisk ubestemte*, og den totale kraftfordeling i konstruktionen kan ikke findes ved ligevægtsbetingelser alene.

Som tidligere nævnt bør man altid vurdere konsekvenserne af, at et konstruktionselement svigter som følge af en overpåvirkning. Hvor fremadskridende sammenstyrning af konstruktionen indebærer risiko for mange menneskers liv, bør konstruktionen opbygges sådan, at en vilkårlig af skiverne kan fjernes, uden at konstruktionen bliver bevægelig.

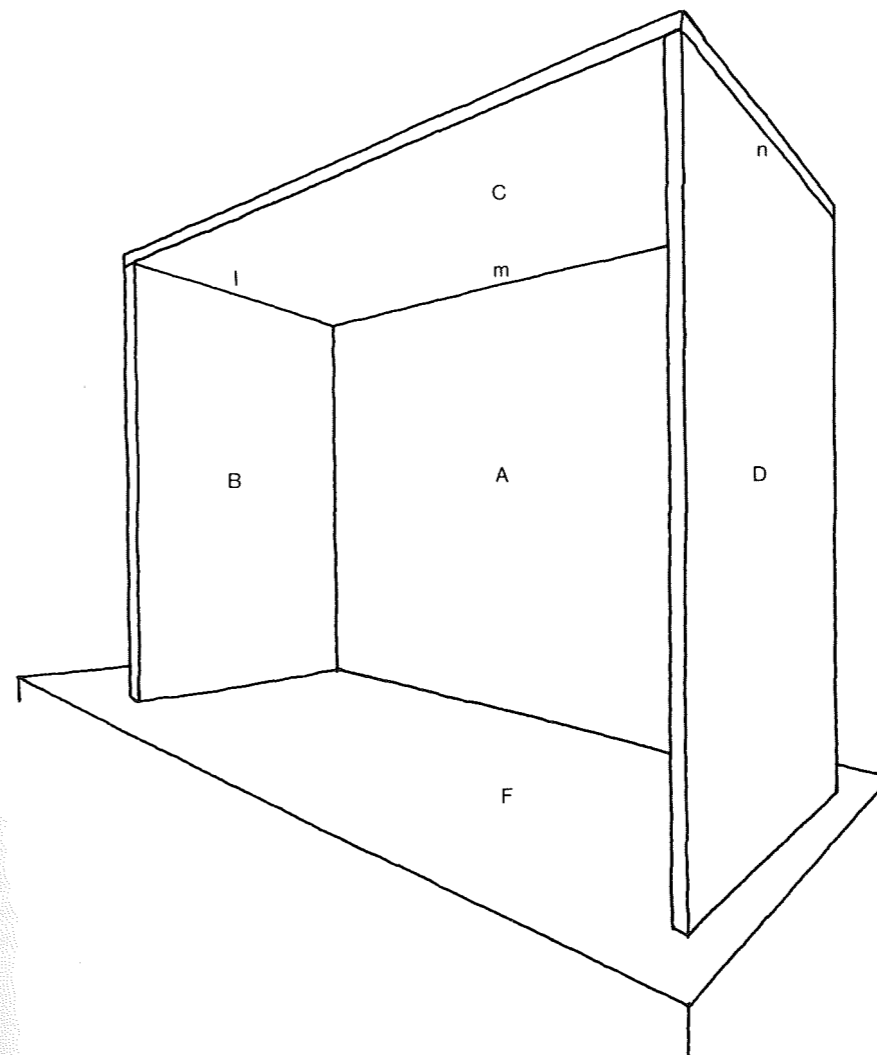
Hvis en af vægskiverne i den statisk bestemte konstruktion i figur 11 fjernes, bliver konstruktionen bevægelig. Men også den statisk ubestemte konstruktion i figur 14 bliver bevægelig, hvis en af dens vægskiver fjernes. I figur 15 er vist en konstruktion, der fremkommer ved tilføjelse af en ekstra skive til konstruktionen i figur 14. I denne nye konstruktion kan en vilkårlig af vægskiverne fjernes, uden at konstruktionen bliver bevægelig.



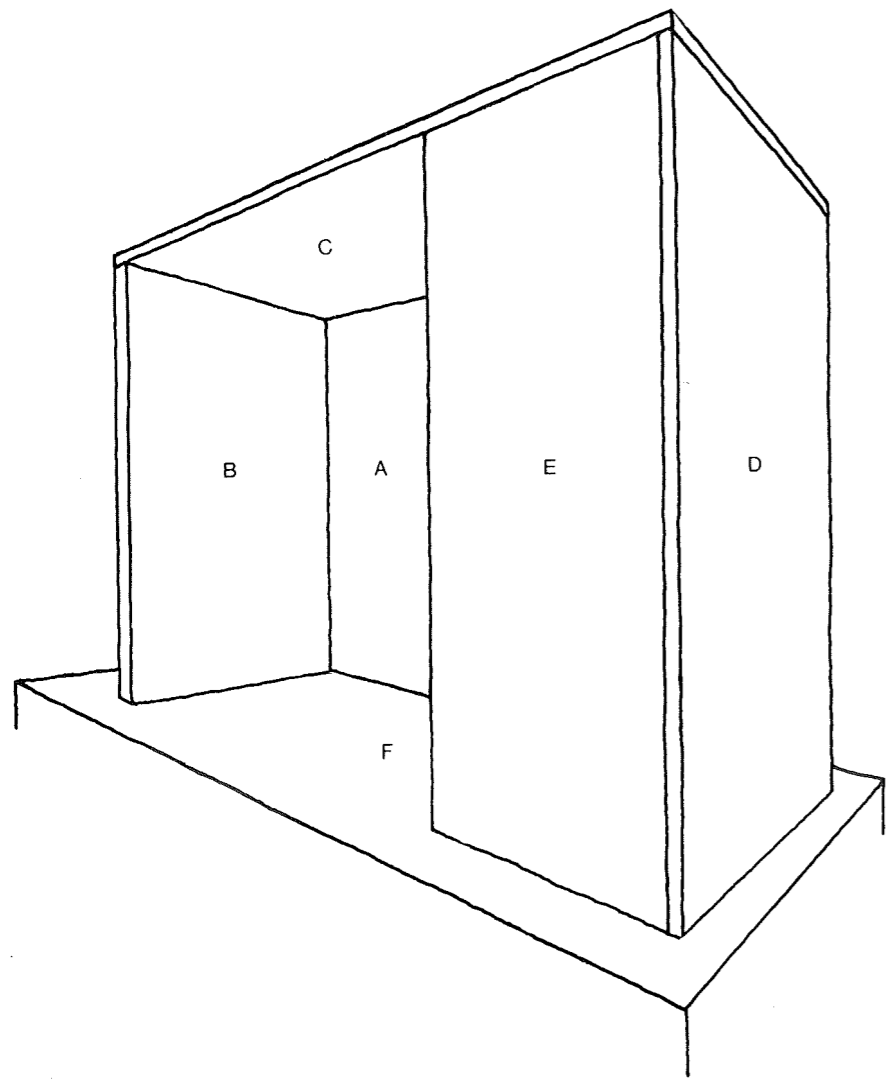
Figur 13. Skivekonstruktion i stabil ligevægt, bestående af to lodrette og en skrå vægskive samt en dækskive.

For påvirkninger i skive C 's plan skal støttelinierne kun fastholde skiven imod bevægelser i støttelinierne længderetninger. Derfor virker en skrå skive lige så godt som en lodret. Når skive C således er fastholdt mod bevægelser i sit eget plan, kan den igen fastholde vægskivernes overkanter mod sådanne bevægelser. Dette er tilstrækkeligt til en fuldstændig fastholdelse af vægskiverne, også selv om de er skrå.

Herefter betragtes en kraft med vilkårlig retning, der angriber i en af skive C 's støttelinier. Hvis kraften ikke angriber i en støttelinie, må den først ved pladevirkning overføres hertil. Kraften kan herefter altid opløses efter skivernes retninger, når disse blot ikke er parallelle.



Figur 14. Skivekonstruktion i stabil ligevægt, bestående af tre vægskiver og en dækskive. Vægskiverne fastholder støttelinierne m , l og n i deres længderetninger. Skive C er således statisk bestemt understøttet. Vægskiverne er indspændt i fundamentplanet, men er endvidere forbundet med hinanden, hvilket medfører en geometrisk overbestemthed. Konstruktionen er derfor statisk ubestemt, idet ikke alle skivekræfterne kan bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene.



Figur 15. Skivekonstruktion i stabil ligevægt, bestående af fire vægskiver og en dækskive. Konstruktionen er fremkommet ved tilføjelse af en ekstra skive til konstruktionen i figur 14. Konstruktionen er statisk ubestemt, og ingen

af skivekræfterne kan findes ved ligevægtsbetingelser alene. Selv om en vilkårlig af vægskiverne fjernes, er konstruktionen stadig i stabil ligevægt.

Nogle anvendelser

I dette kapitel gennemgås en række anvendelser fra praksis af de grundlæggende principper for opbygning af en skivekonstruktion i stabil ligevægt. Der indledes med nogle eksempler, som går ud fra den simple statisk bestemte skivekonstruktion, se figur 11. Det vises, hvorledes disse kan anvendes til fler-etages konstruktioner dels ved at stable disse stabile konstruktioner, dels ved at indskyde udkragede vægge i dem.

Stabel af statisk bestemte skivekonstruktioner

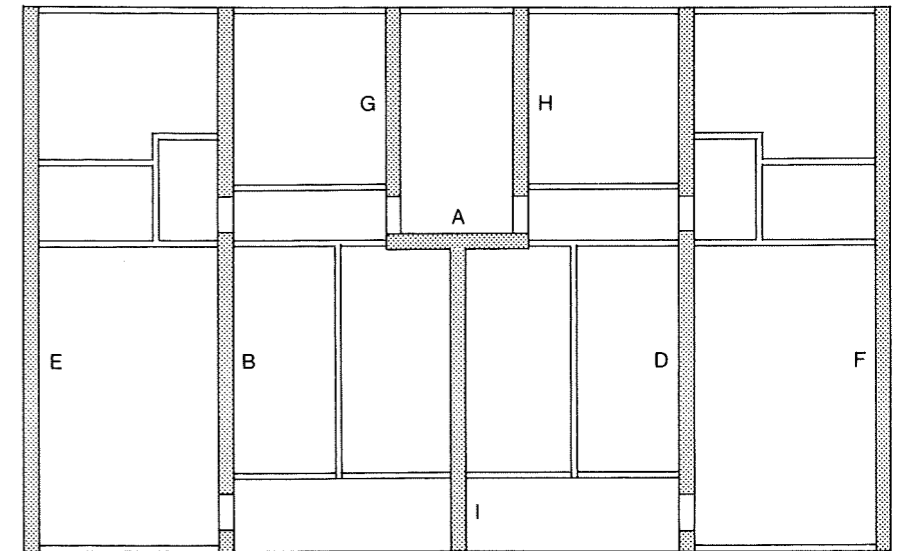
I de første to eksempler vises, hvorledes stabile skivekonstruktioner i flere etager kan opbygges ved at »stable« skivekonstruktioner, der hver især består af tre vægskiver og en dækskive.

Da hver dækskive kun er understøttet af tre vægskiver, skal alle vægskiverne være faste i længderetningen, dvs at de må være statisk bestemte understøttede på den underliggende etage alene. I modsætning til de senere omtalte konstruktioner med indskudte skiver er de her viste konstruktioner derfor karakteristiske ved, at der ikke optræder vandrette skivekræfter, når konstruktionen alene påvirkes af lodret virkende kræfter.

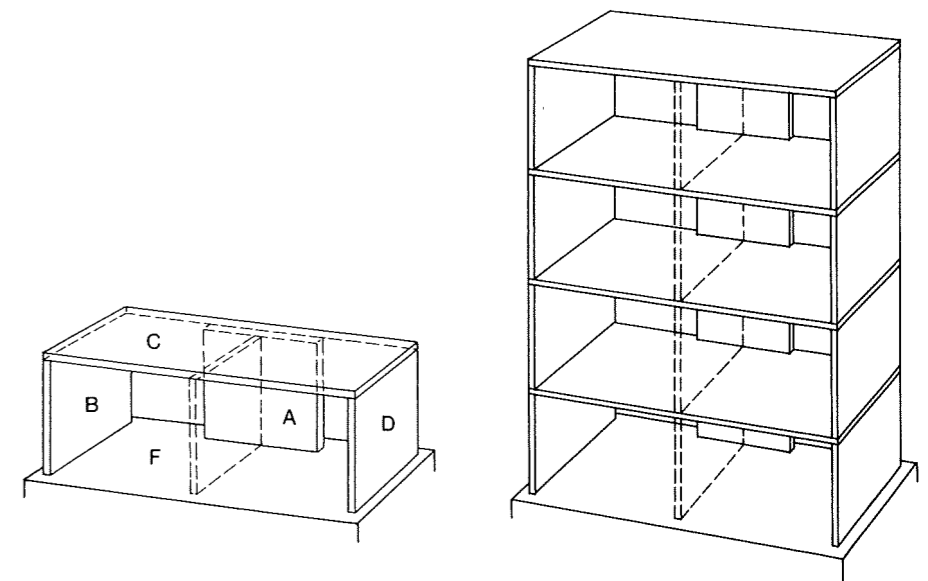
I etageboligbyggeriet benyttes normalt stabiliserende konstruktioner af denne art, dvs konstruktioner, hvor hver væg er statisk bestemt understøttet på den underliggende etage, og hvor der derfor ikke er vandrette skivekræfter for lodret last.

Eksempel 2. Normal løsning; boligblok

På figur 16 vises en plan fra et dansk montagebyggeri. På figur 17 er udtegnet tre af bygningens vægge og en del af dækket for at vise, at konstruktionen er i overensstemmelse med figur 11, og altså i stabil ligevægt. Da bygningen har flere opgange som den viste, er den ikke blot i stabil ligevægt, men også statisk ubestemt. Fjernes således en vilkårlig af vægskiverne, vil konstruktion-



Figur 16. Plan af en opgangsetage fra et dansk montagebyggeri. De bærende vægge er vist med udfyldt tværsnit.

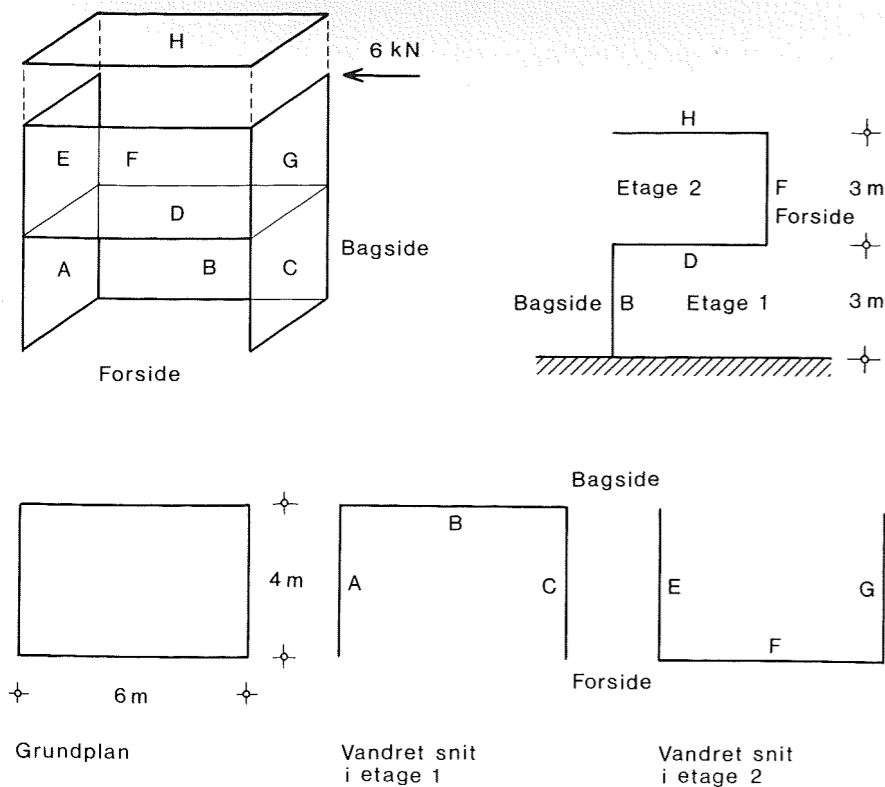


Figur 17. Udsnit af opgangsetagen fra figur 16 samt udsnit af hele opgangen. Tre af de bærende vægge, nemlig A, B og D, danner sammen med dækskiven C en stabil konstruktion. De øvrige bærende vægge forbedrer mu-

lighederne for aflevering af lodret last, medvirker ved optagelse af vandret last vinkelret på facaden og sikrer bygningens stabilitet, selv om en af tværvæggene skulle svigte.

nen ikke blive bevægelig – forudsat at den kan holde til påvirkningerne, og forudsat at de enkelte bygningsdele

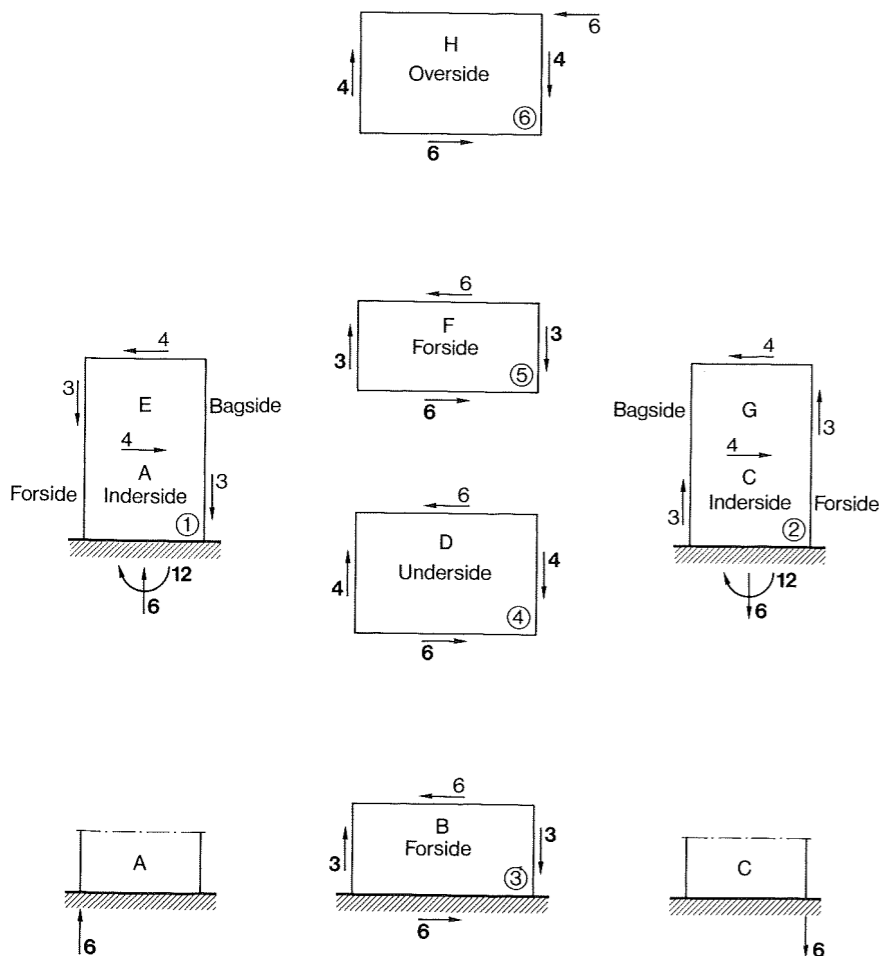
stadig har sådanne understøtningsbetingelser, at en ny ligevægtstilstand er mulig.



Figur 18. Stabil, toetages skivebygning. Hver etage består af tre statisk bestemt eller statisk ubestemt understøttede vægskiver og en dækskive, og svarer således til konstruktionen i figur 14. Bygningen tænkes påvirket af en vandret kraft på 6 kN, virkende på øverste dækskive. Beregning af de heraf fremkaldte snitkræfter er vist i figur 19.

Grundplan Vandret snit i etage 1 Vandret snit i etage 2

Figur 19. Beregning af skivekræfter i skivebygningen i figur 18. Snitprincippet anvendes: skiverne snittes løs fra hinanden, og der påføres forskydningskræfter. Herefter opstilles ligevægtsbetingelsen for hver skive for sig. De indcirklede tal angiver, i hvilken rækkefølge konstruktionen fysisk kan opbygges. Opstilling af ligevægtsbetingelser foregår i modsat rækkefølge. For hver skive er de kræfter, der kendes i forvejen, angivet med normal skrift, mens de kræfter, der findes ud fra ligevægtsbetingelserne, er angivet med fed skrift. Alle kræfter er angivet i kN; skiverne A's og C's indspændingsmomenter er i kNm. Den underste etage er statisk ubestemt; jf figur 14. Der er derfor indført den forudsætning, at moment og normalkraft er nul i skive B's indspænding i fundamentet.



Eksempel 3. Vendt løsning

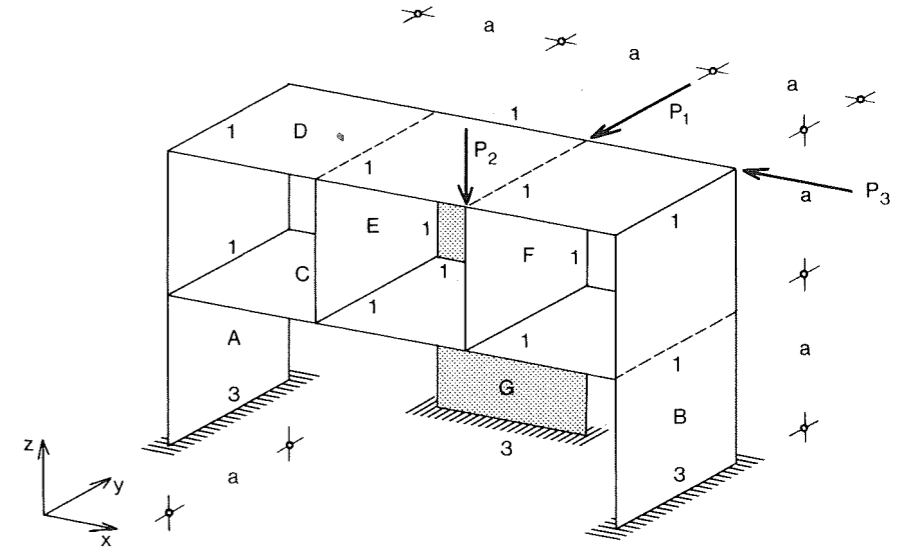
I dette eksempel skal vises en skivekonstruktion opbygget af to af de på figur 14 viste stabile skivekonstruktioner, der hver især består af tre vægskiver og én dækskive, se figur 18.

Skivebygningen ses stadig at være stabil, idet hver af de indgående skiver er understøttet langs tre faste støttetlinier.

Antages en kraft på 6 kN at virke i tagdækskiven, kan de øvrige kræfter bestemmes som vist på figur 19.

De på figuren indcirklede tal viser rækkefølgen af opbygningen af konstruktionen. Beregningsgangen foregår i modsat rækkefølge. For hver af de indtegnede skiver er de givne laster angivet med mager skrift, mens de øvrige, fra ligevægtsbetingelserne fundne kræfter, er angivet med fed skrift.

Da vægskiverne i underste etage både er indbyrdes forbundne og indspændte i fundamentet, må man gøre visse antagelser for at kunne bestemme hele kraftfordelingen. I dette eksempel er – helt vilkårligt – antaget, at moment og normalkraft i samlingen mellem skive B og fundamentet er nul.



Figur 20. Skivebygning med indskudte væg. Bygningen kan også opfattes som to etager af den i figur 17 viste stabile konstruktion, hvor man i den nedre etage har ønsket et stort, åbent rum, mens man i etagen ovenover har kunnet anbringe de to bærende vægge E og F. For at dækkens spændvidde ikke skulle blive urimeligt stor, er de ophængt i, henholdsvis understøttet af, væggene E og F, som er udkragede fra bagvæggen.

De tal, der er påskrevet konstruktionens samlinger, er antallet af mulige snitkræfter. I alle samlinger kan der forekomme en forskydningskraft; ved indspændinger endvidere et moment og en normalkraft. Snitkræfterne i konstruktionerne er i de følgende figurer beregnet for hver af påvirkningerne P_1 , P_2 og P_3 .

Statisk bestemte skivekonstruktioner med indskudte vægge

I det følgende er vist en række eksempler, hvor der – i modsætning til de hidtil viste eksempler – optræder vandrette skivekræfter, selv når konstruktionen alene er påvirket af lodret virkende kræfter.

Eksempel 4. Indskudte vægge

I figur 20 er vist en toetages bygning af samme type som den på figur 17 viste (uden den punkterede midtertværvæg). Konstruktionen i figur 20 er dog suppleret med to vægskiver E og F i øverste etage.

Da skiverne E og F er statisk bestemt understøttede af skiverne G, C og D, kan de igen understøtte dækkene mod lodret nedbøjning og således nedsætte dækladernes spændvidder ganske betydeligt.

Det ses, at de to indvendige tværvægge på 1. sal vil forsøge at dreje sig fremover og ned. Det vil sige, at de forsøger at presse den øverste dækskive fremad og den nederste dækskive tilbage.

Det ses videre, at de to tværvægge på 1. sal vil forsøge at »falde ned«, efter at selve drejningen er forhindret gennem forbindelsen med dækkene. Men her træder tværvæggens tredje støttetlinie

til – forbindelsen til bagvæggen – og den nedadrettede kraft på tværvæggene optages af en opadgående reaktion hidrørende fra bagvæggen.

Konstruktionselementerne udnyttes således på den »rigtige led« – de udnyttes som skiver.

Ved at udnytte konstruktionens skivevirkning på denne måde har man opnået en åben stueetage med rimelige konstruktioner. Havde man i stedet ladet dækket C spænde fra væg A til væg B og bære væg E og væg F, ville konstruktionen i praksis være blevet overordentlig kostbar og pladskrævende.

Skivekræfterne i dækkene optages af modsat rettede kræfter ude ved gavlskiverne. Gavlskiverne vil derfor blive påvirket af et væltende moment, og man må derfor sørge for, at der er en sådan normalkraft på gavlen, at reaktionen i fundamentet ikke falder uden for understøtningsfladen. Eventuelt kan gavlvæggens fundament forbindes til bagvæggens fundament for at opnå den fornødne normalkraft.

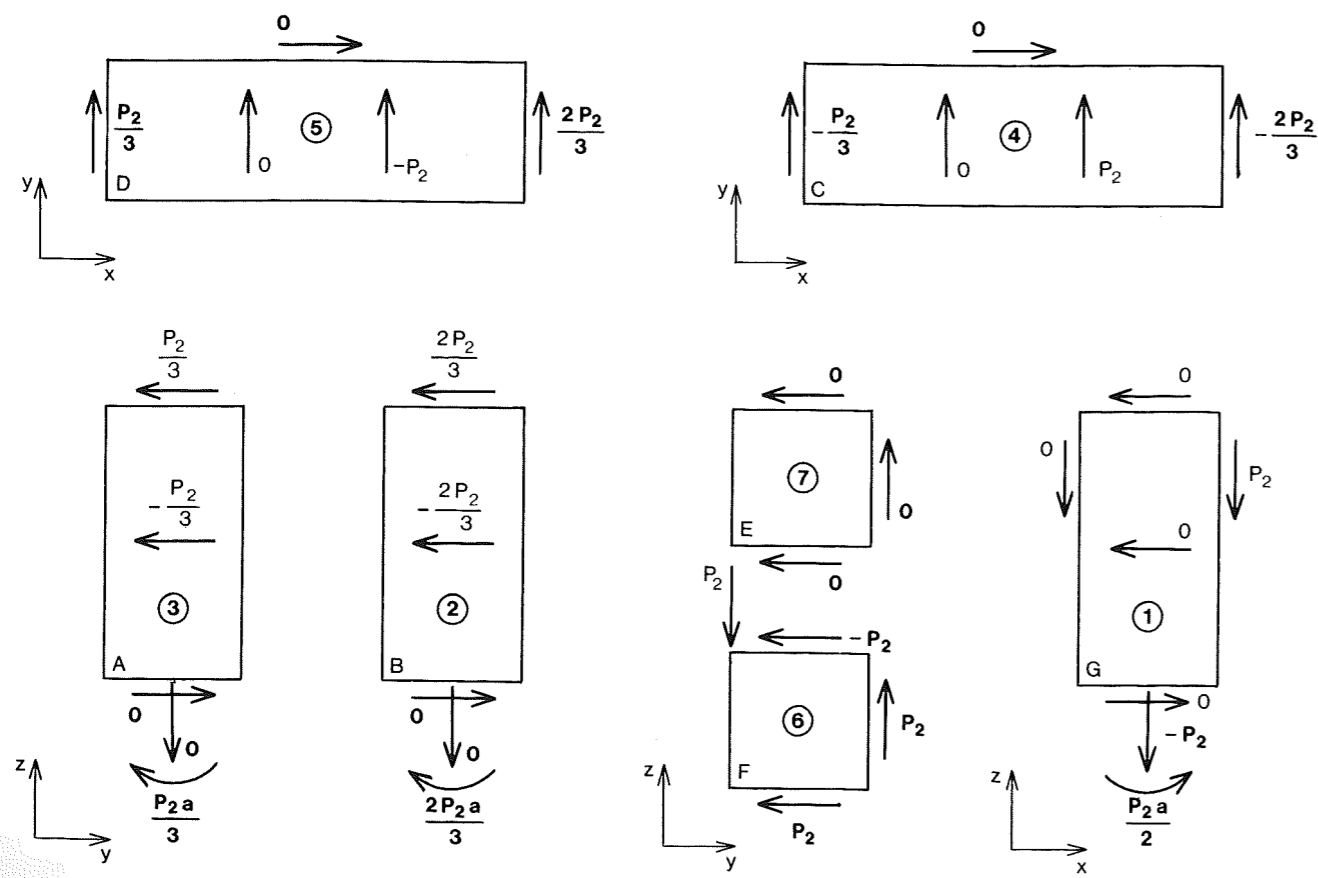
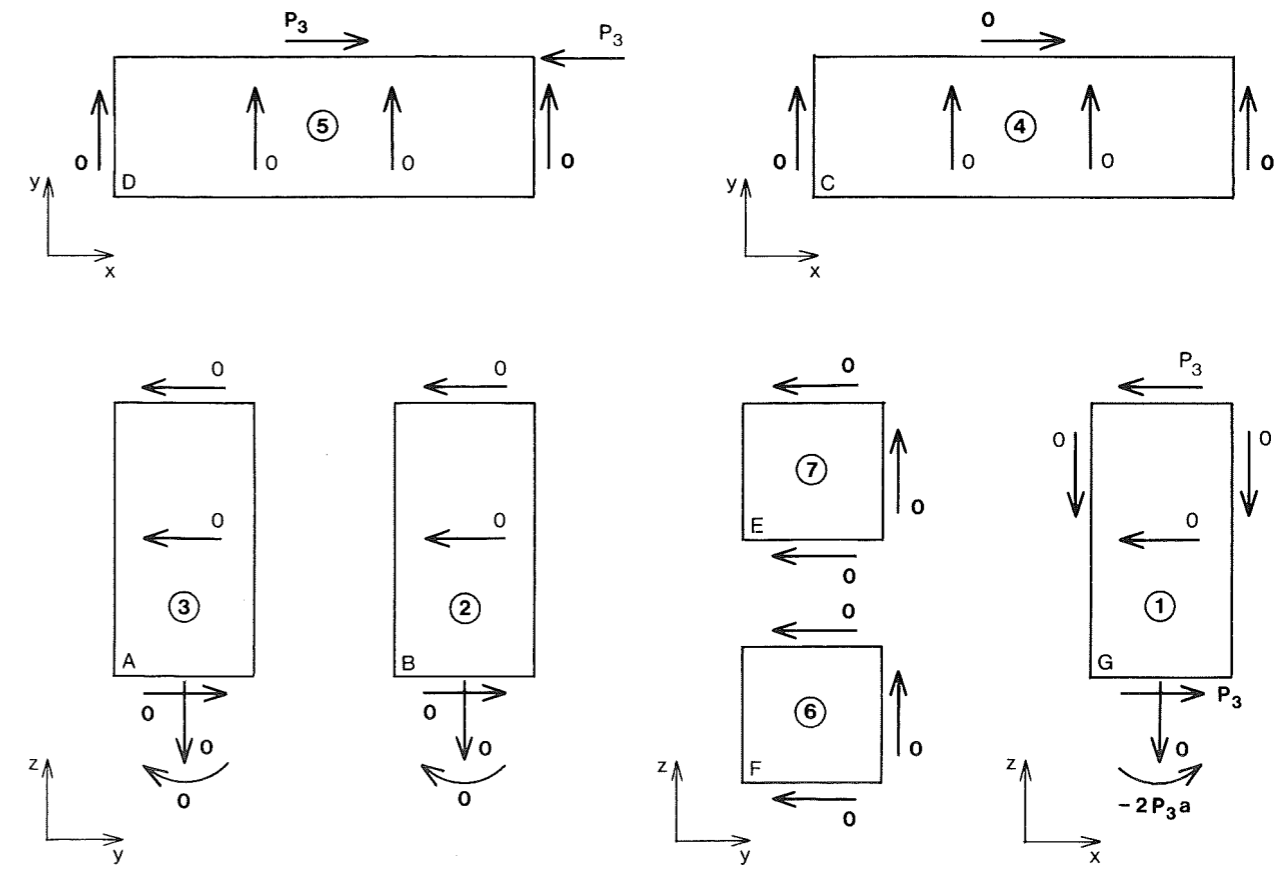
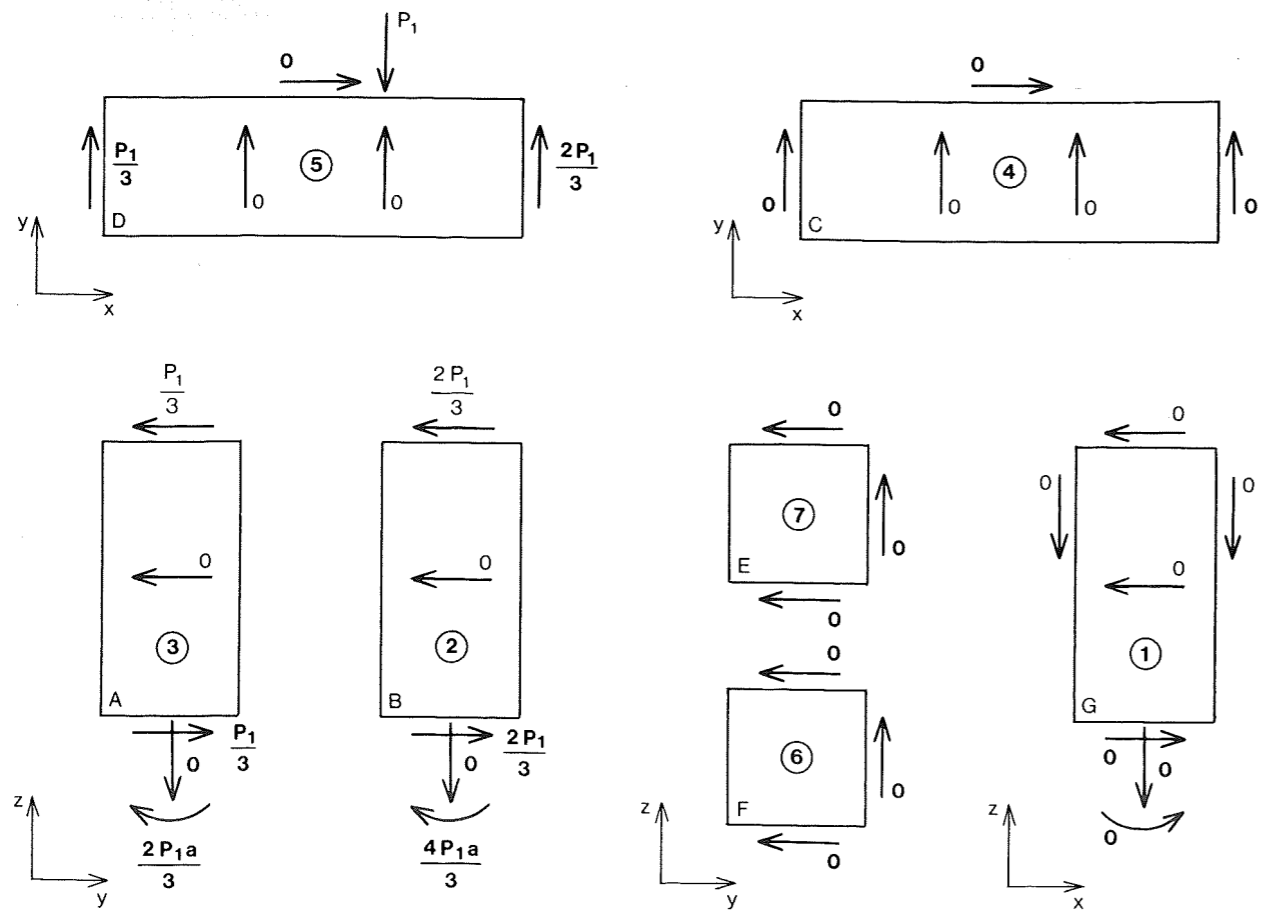
Beregning af skivekræfterne er vist i figur 21 for tre forskellige belastningstilfælde, bestående af en enkeltkraft. De tre enkeltkræfter, P_1 , P_2 , P_3 , er vist på figur 20.

Det ses endvidere på figur 20 og 21, at konstruktionen består af $n = 7$ skiver, og at der skal påføres i alt $r = 21$ uafhængige randkræfter (jf tallene på figur 20, hhv antallet af snitkræfter med

fed skrift på figur 21), når skiverne snittes løs fra hinanden. Da således $r = 3n$, er en nødvendig betingelse for statisk bestemt opfyldt. Beregningerne viser, at alle skivekræfterne kan findes ved ligevægtsbetingelser alene. Konstruktionen er derfor statisk bestemt. Da det endvidere ses, at konstruktionen kan belastes i alle retninger uden at falde sammen, er den i stabil ligevægt.

Beregningen starter i et skivefelt, som kun har tre ubekendte randkræfter. Ved at påføre de herved fundne randkræfter på de tilstødende skiver, kan man successivt betragte skiver med kun tre ubekendte randkræfter, jf beregningsrækkefølgen i figur 19.

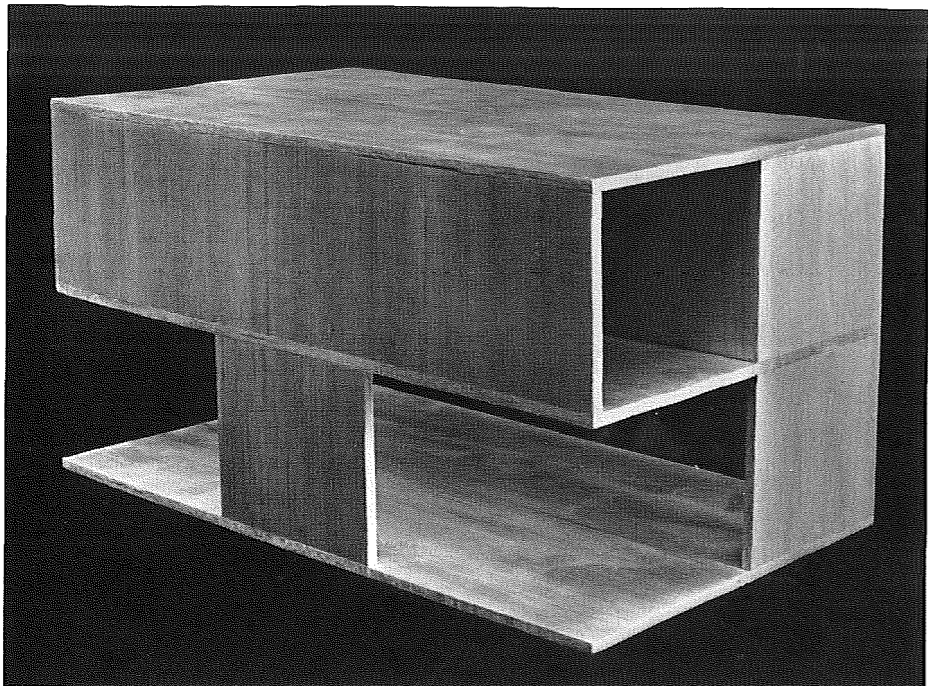
I skivekonstruktionen kan eksempelvis fjernes skivefeltene E og F, da de har netop tre randkræfter, uden ændring af den statiske bestemt. Efter en sådan fjernelse vil kraften P_2 dog ikke kunne optages af konstruktionen udelukkende ved skivekræfter, da den ikke længere angriber i et skivefelts plan.



Figur 21. Beregning af skivekræfter i konstruktionen i figur 20, successivt påvirket af kræfterne P_1 , P_2 og P_3 . Fremgangsmåden er den samme som i figur 19.

I det første tilfælde virker P_1 i øverste dækskives plan. Den indskudte etage kommer derfor ikke til at medvirke. I det andet tilfælde virker P_2 i den indskudte vægskive F 's plan. Denne vægskive og begge dækskiverne – men ikke vægskive E – kommer derfor til at medvirke.

I det tredje tilfælde virker P_3 i bagvæggens vægskive G 's plan. Bortset fra kanten af dækskive D medvirker de øvrige skiver derfor ikke. Nogle af dem er alligevel nødvendige for konstruktionens stabilitet.



Figur 22. Skivebygning med indskudt dæk. Konstruktionen består af tre gennemgående vægge (fra fundament til øverste dæk), som understøtter de to dækskiver, så de er i stabil ligevægt. Endvidere er der i øverste etage placeret seks langsgående vægge, som er udkra-

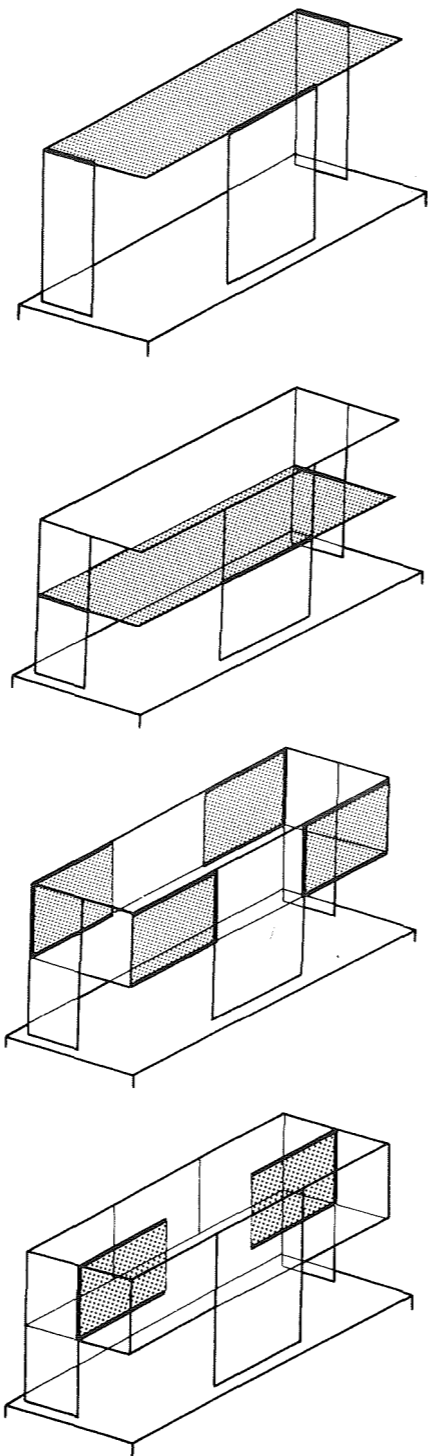
gede fra de gennemgående vægge, og som hjælper med at bære det overliggende og det underliggende dæk. Fire af disse vægge er udkragede fra tværvægge og må derfor fastholdes mod drejning omkring støttepunktet gennem skivevirkning i dækkene.

Eksempel 5. Indskudte vægge

I figur 22 er vist en skivekonstruktion af samme art som konstruktionen i eksempel 4. Denne konstruktion kan analyseres på tilsvarende måde, fx som

antydnet i figur 23. Analysen viser, at konstruktionen er i stabil ligevægt. Eksemplet stammer fra [8].

De to følgende eksempler viser anvendelser fra praksis af det princip, som er beskrevet i de to foregående, teoretiske

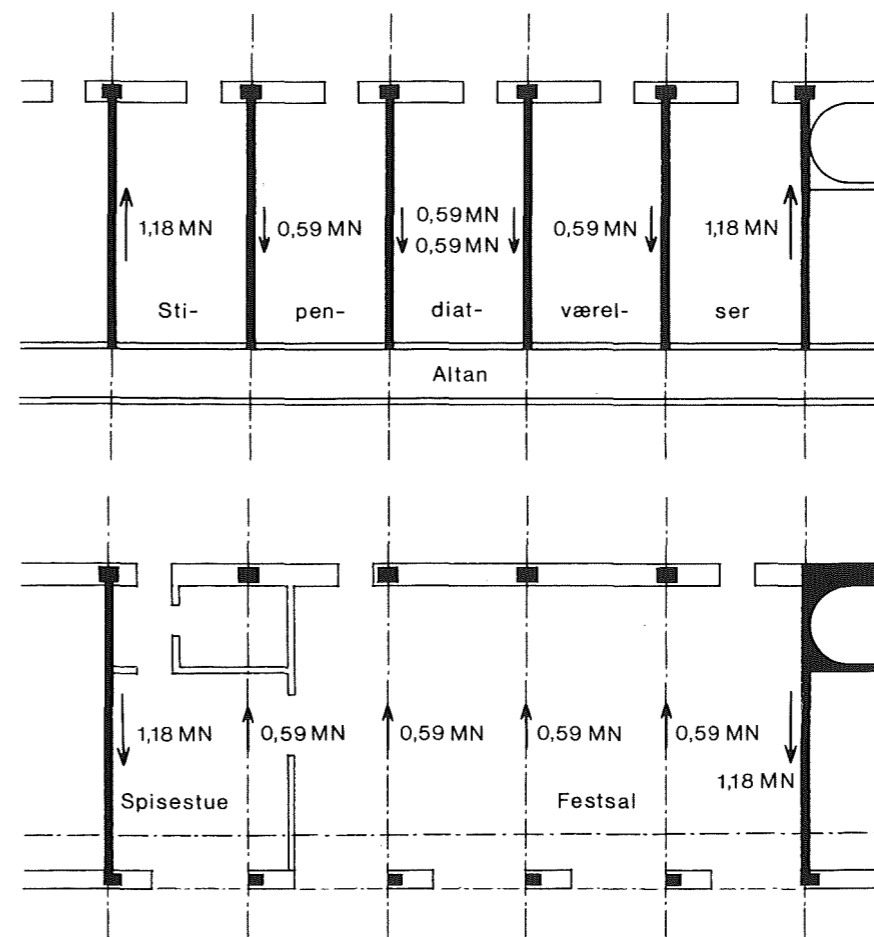


Figur 23. Analyse af konstruktionen i figur 22.

eksempler. Princippet har ikke været nær så meget anvendt i byggeriet som det mere simple princip, der blev beskrevet i eksempel 3, hverken i montagebyggeriet eller i mere traditionelt byggeri.



Figur 24. Værelsesfløjen i Det danske Institut i Rom. Værelserne ligger i overetagen med adgang til altan. Som følge af det kuperede terræn er der en etage under terrassens niveau, således at overetagen er 3. etage. Det fælles opholdsrum (festsalen) ligger på 2. etage i venstre side af billedet, med adgang direkte til terrassen. Foto: Skriver.



Figur 25. Udsnit af værelsesfløjen. Øverst er vist en plan af 3. etage, nederst en plan af 2. etage. De sorte tværsnit viser de vægge og vægdele, der beregningsmæssigt udgør det bærende system. Pilene angiver de vandrette kræfter, som væggene i 3. etage påvirker dækkene over 2. etage, henholdsvis 3. etage med.

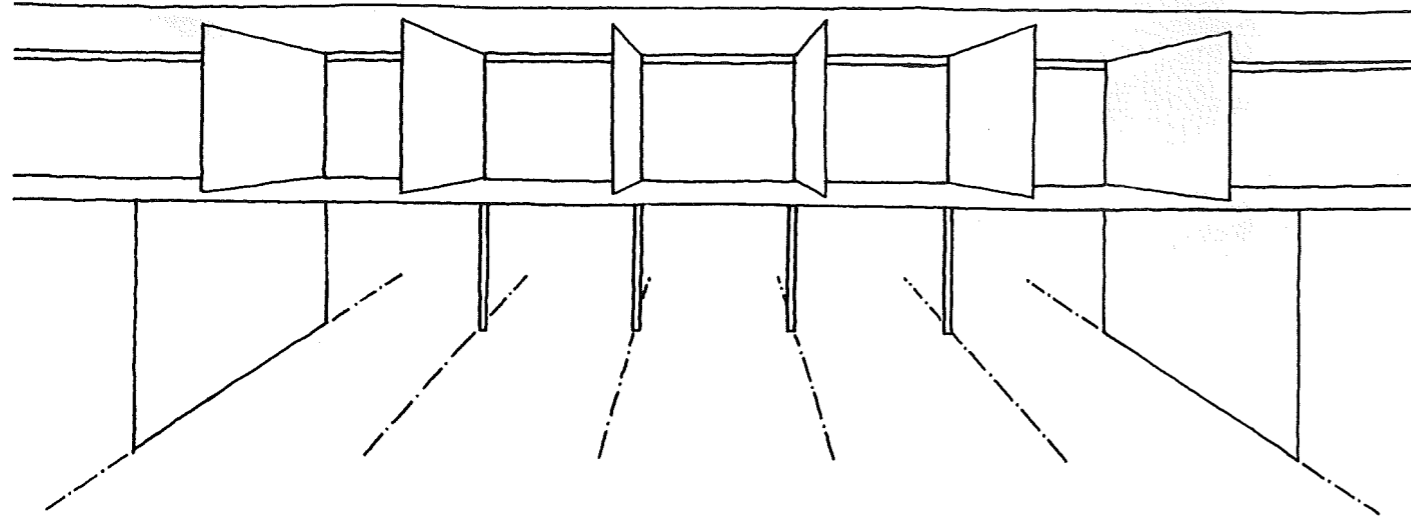
Eksempel 6. Det danske Institut i Rom

Vandret skivevirkning i dækkene er benyttet ved udførelsen af en festsal i værelsesfløjen i Det danske Institut i Rom, se figur 24-26. Salen er ca 8 m på den korte led. Normalt ville et dæk

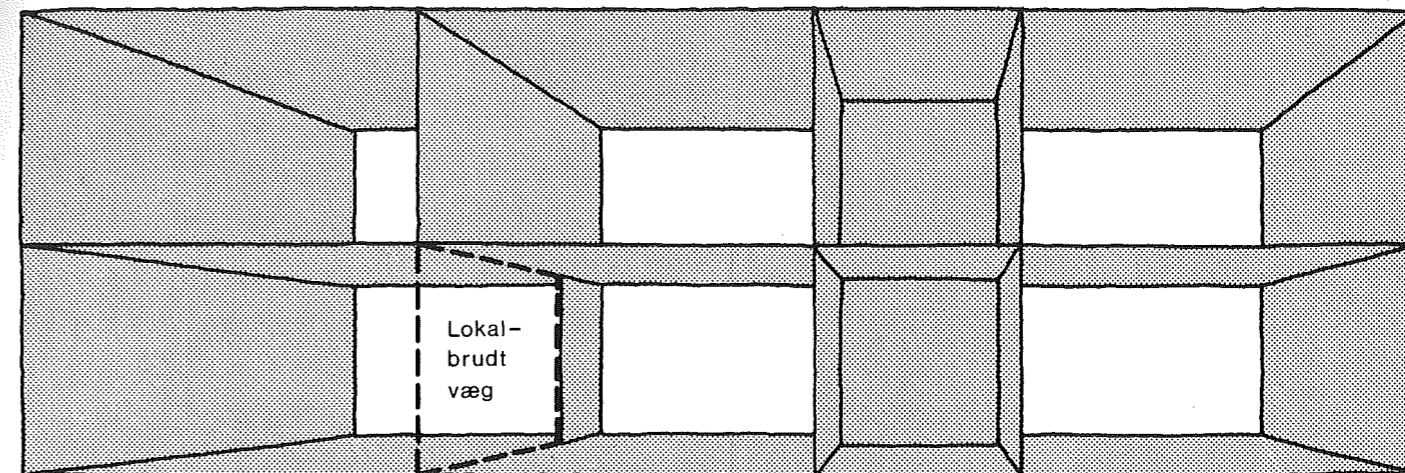
med denne spændvidde blive udført med bjælker. I etagen ovenover findes imidlertid en række stipendiatværelser, som er adskilt af bærende skillevægge med en afstand på ca 3,5 m. Ved at op-hænge dækket i disse vægge har man kunnet undgå bjælkerne. Men overetagen er trukket tilbage, således at

skillevæggene ikke understøttes af fest-salens facadesøjler, men alene af bag-væggen. Det bærende princip er således analogt til det, der er vist i eksempel 4.

Denne bygning, som er beskrevet i [4], er dog ikke opført af betonelementer, men er støbt på stedet.



Figur 26. Udsnit af værelsesfløjen. Perspektiv af det bærende system. Væggene i 3. etage er udkraget fra de indmurede jernbetonsojler i bagvæggen i 2. etage.



Figur 28. I en traditionelt opbygget skivekonstruktion, hvor etagerne er ens, eller hvor i det mindste alle bærende vægge i en etage er direkte understøttede på den underliggende etages vægge, føres alle lodrette kræfter ned gennem de bærende vægge uden at fremkalde skivekræfter i dækkene.

Eksempel 8. Lokalbrud

De viste eksempler 6 og 7 er snarere undtagelser end typiske for byggeriet, og i montagebyggeriet har princippet hidtil ikke været direkte benyttet.

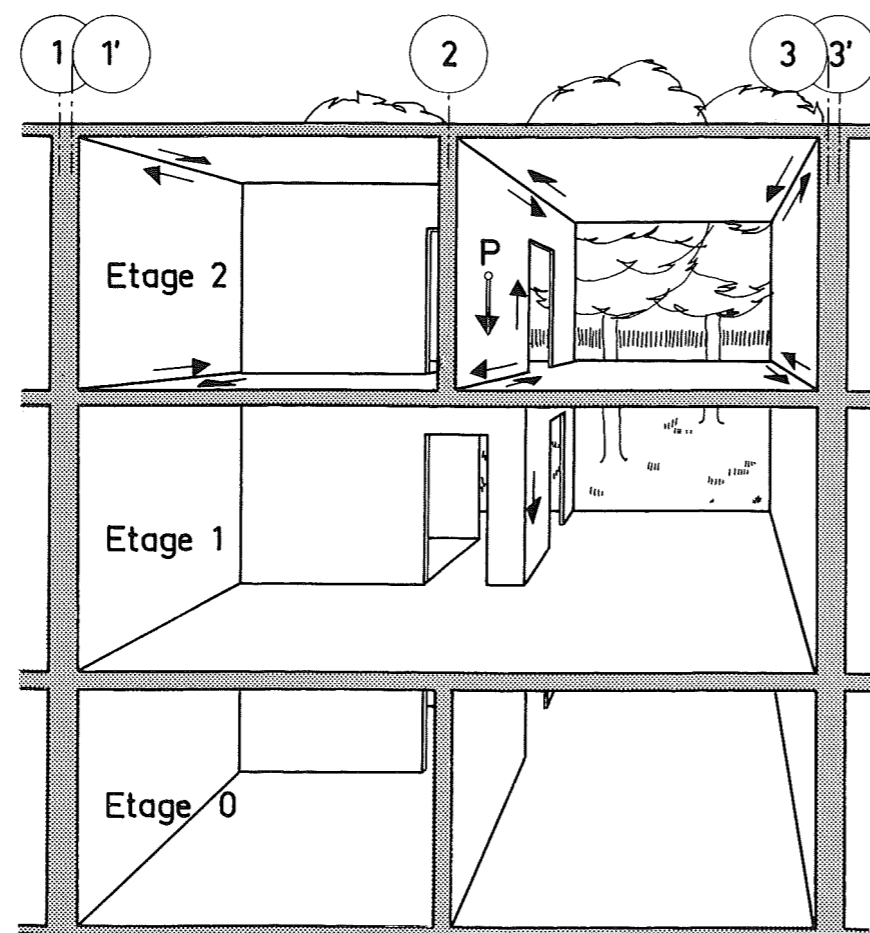
Indirekte benyttes det imidlertid, nemlig ved vurdering af skivebygningers stabilitet efter at et lokalbrud er opstået. Figur 28 viser således en toetages skivebygning med lokalbrud i én af tvær-

væggene i stueetagen. Det ses, at kraftforløbet i den lokalbrudte konstruktion i princippet helt svarer til kraftforløbet i det viste eksempel fra Boligforeningens Rækkehuse. Den lokalbrudte skivebygning vil altså være stabil, forudsat at den kan holde til påvirkningerne og forudsat, at de enkelte bygningsdele stadig har sådanne understøtningsbetingelser, at en ny ligevægtstilstand er mulig.

Men hvis et lokalbrud opstår som vist, skal de lodrette kræfter over lokalbruddet flyttes hen over den intakte del af væggen. En sådan parallelforskydning af en kraft kræver, at der påføres et moment: det skal hindres, at væggen over hullet vælter ned i hullet. Normalt optræder dette moment dels som vandrette kræfter i dækkene, dels som et moment i den intakte del af væggen. Fordelingen på disse to bidrag afhænger af stivheds- og deformationsforholdene i konstruktionen.

Eksempel 7. Boligforeningens Rækkehuse

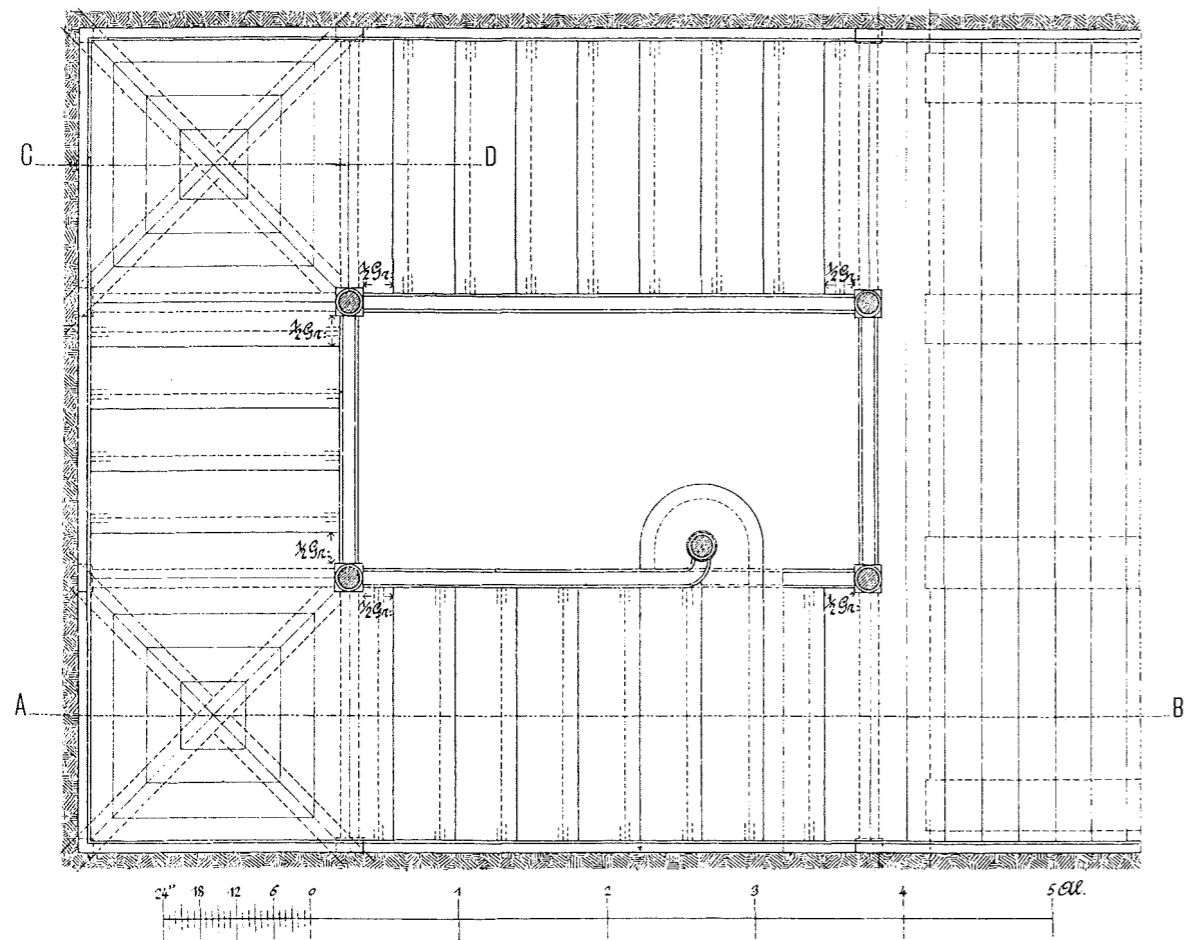
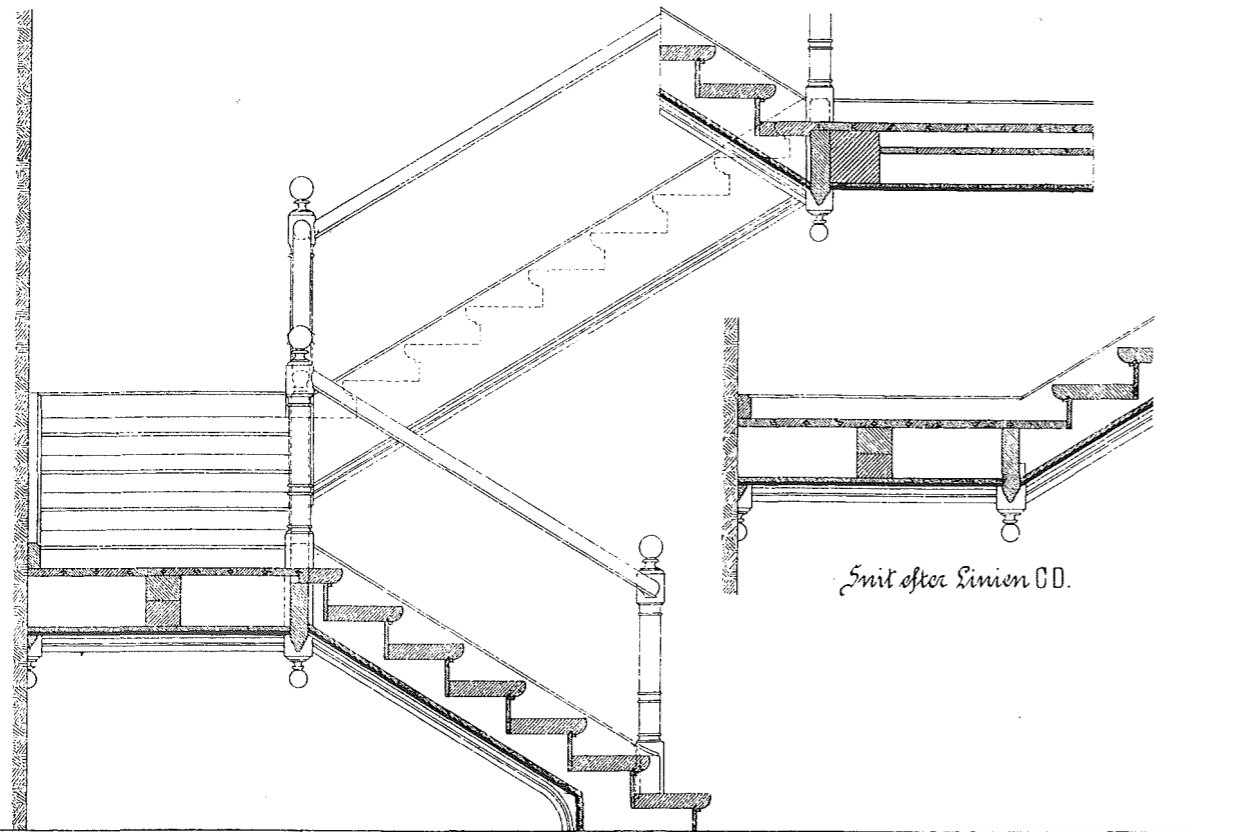
Princippet »indskudte vægge« kendes også fra dansk boligbyggeri, hvor det bl.a. er anvendt i Boligforeningens Rækkehuse, type 4, se figur 27 og [5]. Også dette byggeri er dog støbt på stedet.



Figur 27. Boligforeningens Rækkehuse, type 4. Perspektiv af råhus. Pilen mærket P viser påvirkningen på den udkragede væg; de øvrige pile viser de skiverandkræfter, der virker på vægge og dæk som følge af påvirkningen.

INDSTEMMEDE TRAPPER.

Treløbs Søjletrappe.



Figur 31. Treløbstrappe af træ fra slutningen af det 19. århundrede.

Eksempel 10.

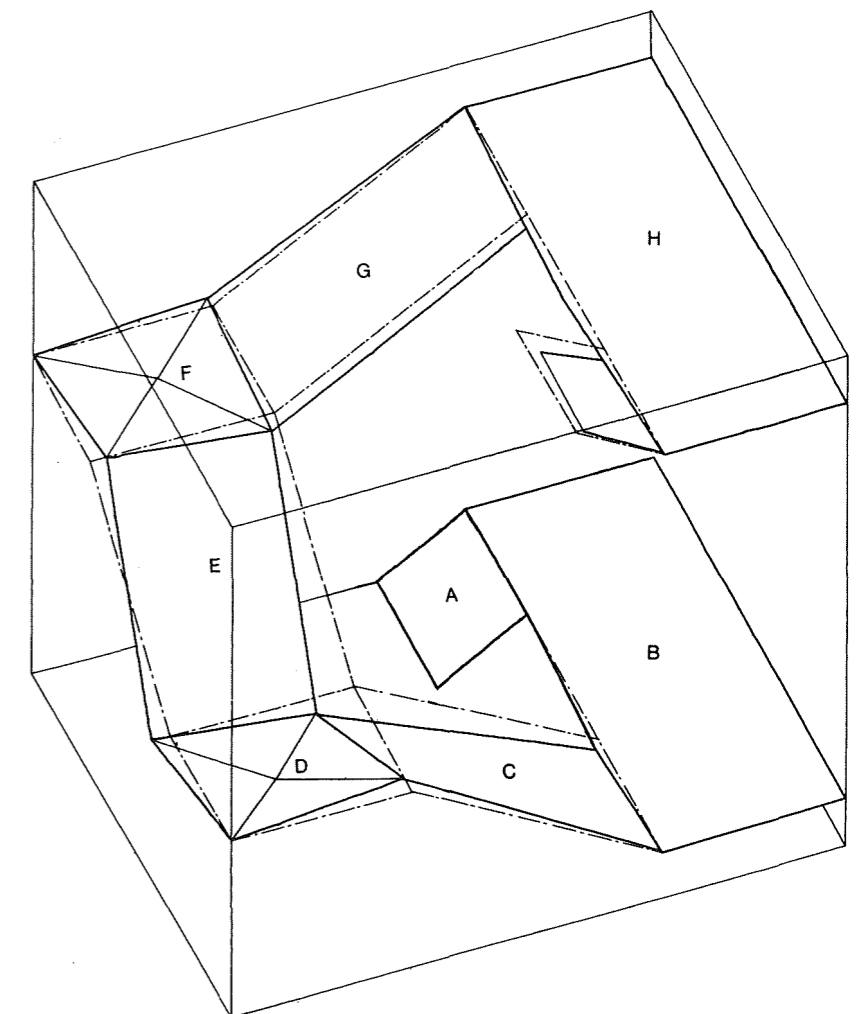
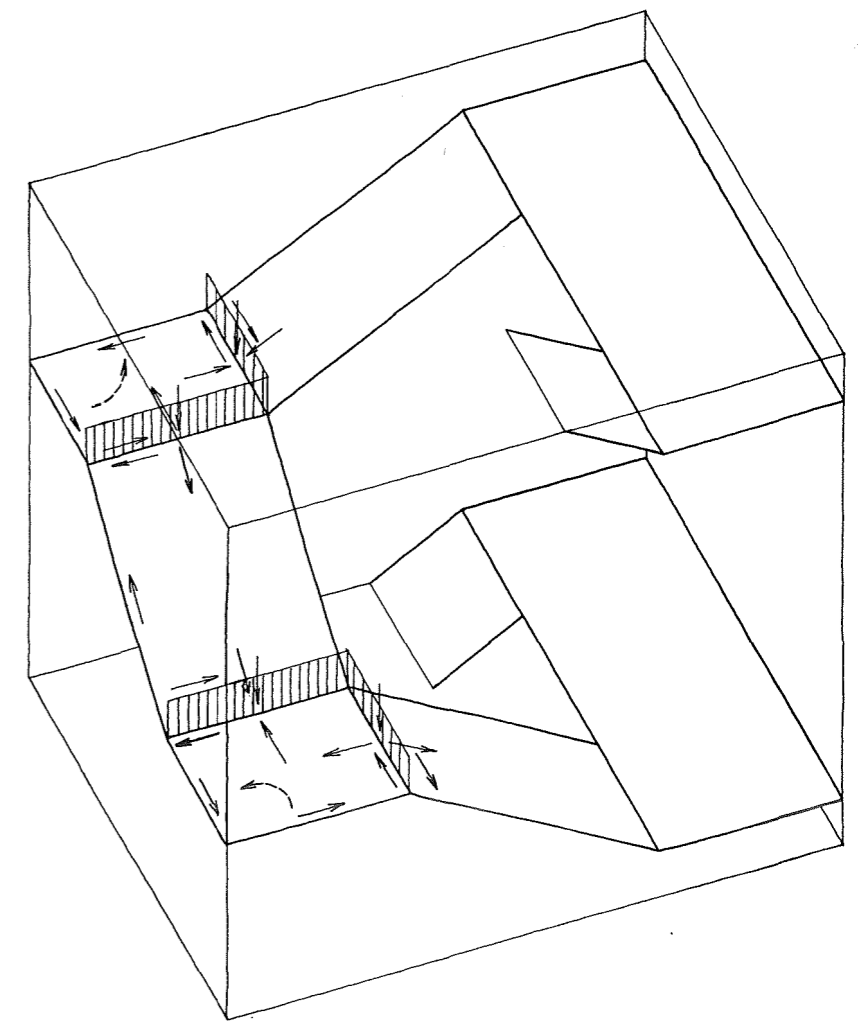
Den indstemmede treløbstrappe

Man har åbenbart været så tilfreds med den indstemmede treløbstrappes bæreevne, at man i mange tilfælde ukritisk har overført treløbstrappens dimensioner til treløbstrappen, se figur 31, men med et væsentligt ringere resultat til følge.

Godt nok er hovedreposerne støttet langs tre faste reaktionslinier – men mellemreposerne er det ikke, se figur 32 øverst. Som i konstruktionen i figur 9, halvtaget med kun to vægge, kan der her ske en drejning af dækskiven, dvs mellemreposerne kan dreje og vil give anledning til bøjningspåvirkning af trappevæggene, samtidig med at mellemreposerne frie hjørner vil have en tendens til at bøje kraftigt ned, se figur 32 nederst.

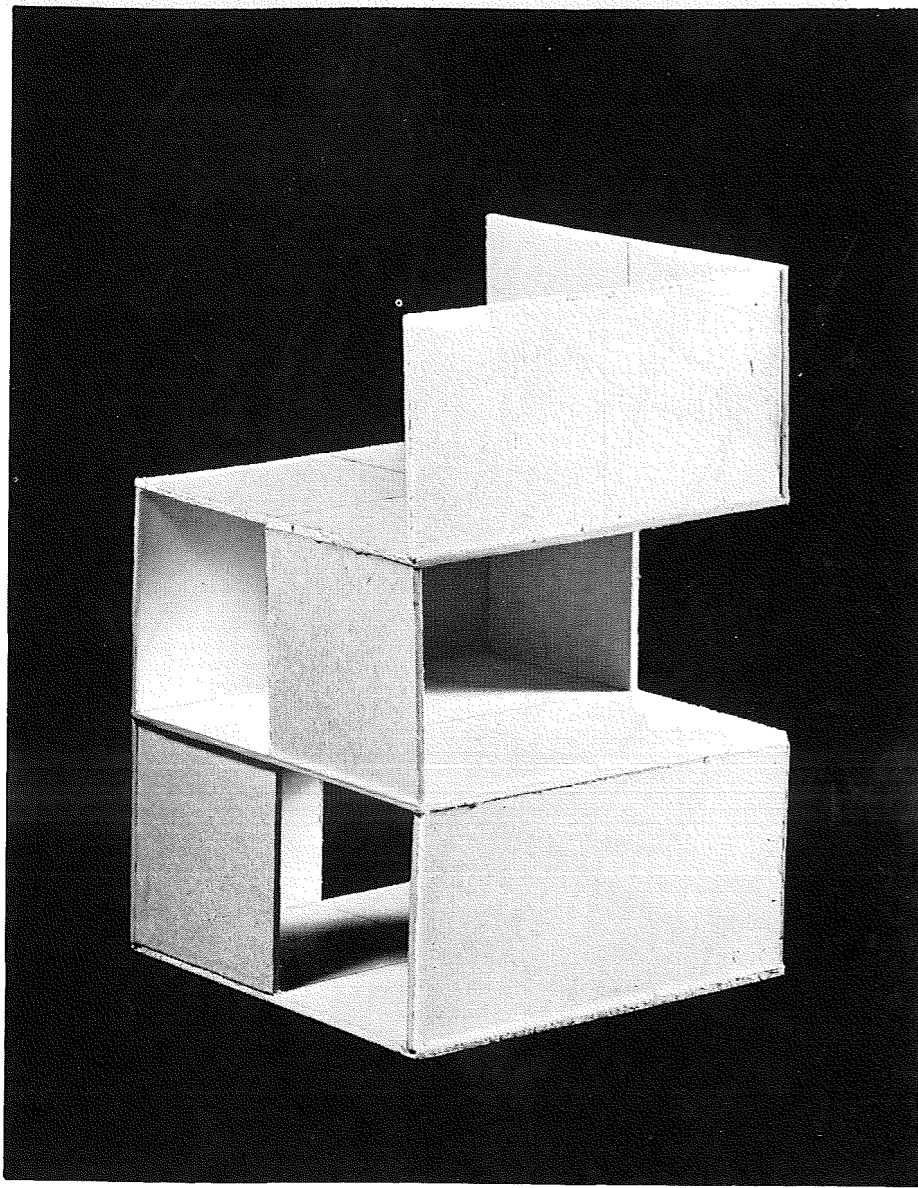
Forholdet lader sig ofte iagttage ved ældre, tømrede treløbstrapper, hvor mellemreposerne diagonaltømmer er knækket og ikke længere kan medvirke til at bremse nedbøjningen af det frie hjørne. Ligeledes kan bøjningspåvirkningen på væggene ofte iagttages, især hvor disse er facader med svækkende vinduesåbninger.

Den indstemmede treløbstrappe er et eksempel på en skivekonstruktion, der ikke opfylder betingelsen for stabil ligevægt.

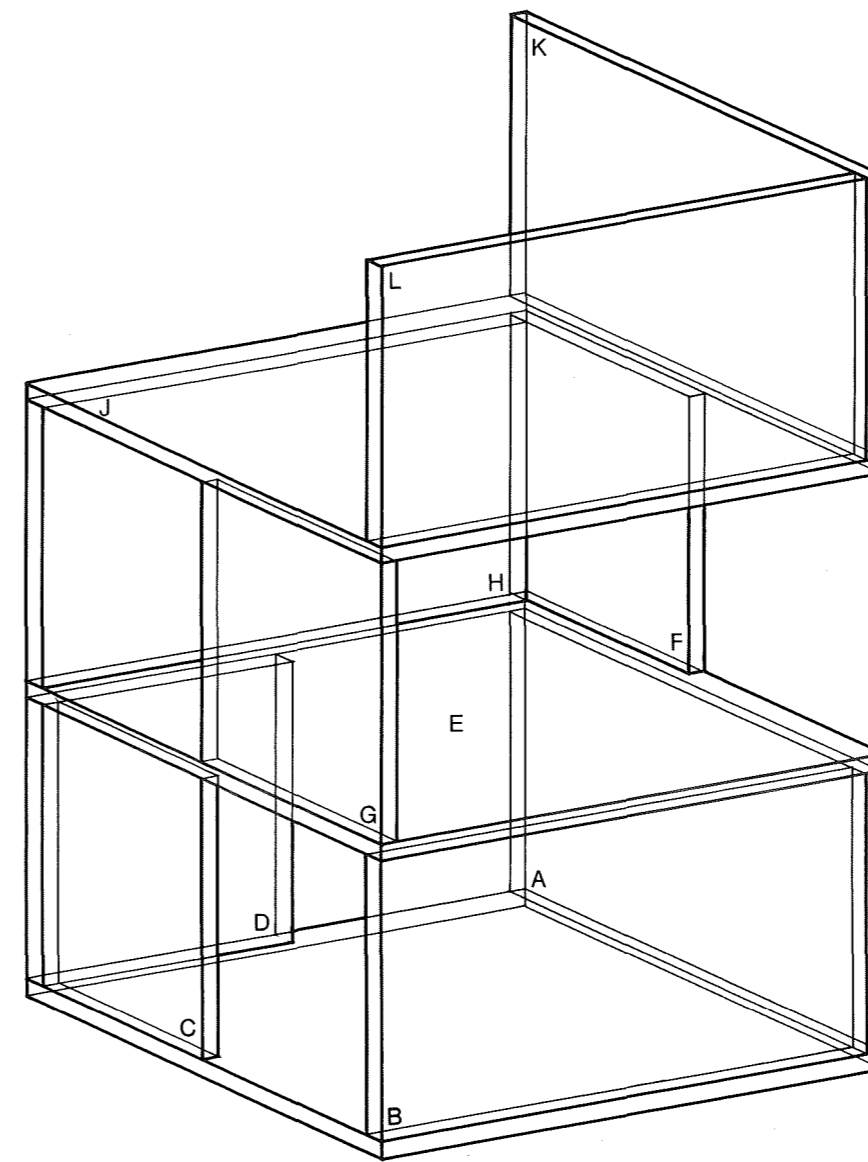


Figur 32. Øverste figur viser kræfter i en treløbstrappe. Som i figur 30 kan man også her starte med at bestemme trappeløbenes snitkræfter, idet hvert trappeløb støttes af en vægskive og to reposskiver. Betragter man dernæst en mellemrepos, ses det, at den kun er påvirket af to ubekendte snitkræfter, nemlig en forskydningskraft langs hver af samlingerne repos/vægskive. Dette er ikke tilstrækkeligt til at sikre ligevægt, jfr figur 10. Mellemreposerne vil dreje om de yderste hjørner som antydnet med de punkterede pile.

Nederste figur viser treløbstrappens deformationer. Trappens oprindelige position er vist med punkteret linie, den deformerede med fuldt optrukket linie. Den nederste kant af trappeløb C er ikke understøttet i lodret retning; derfor kan konstruktionen ikke virke som den stabile konstruktion i figur 13.



Figur 33. Papmodel af en skivekonstruktion, udført af studerende på Arkitektskolen som øvelse under et kursus i skivebygningers stabilitet. Konstruktionen viste sig at være i stabil ligevægt til og med dæk over 2. etage. I forbindelse med figur 34 er der foretaget en analyse af konstruktionen. Fremstilling af en papmodel tager normalt længere tid end en ræsonnerende analyse, men papmodellen har visse fordele. Bl.a. giver den en umiddelbar fornemmelse af, om en kompliceret konstruktion er i stabil ligevægt, og den har især store kommunikationsmæssige og pædagogiske fordele.



Figur 34. »Røntgenbillede« af skitsemodellen på figur 33. Væg- og dækskiverne A-J ses at danne en stabil skivekonstruktion i to etager. Vægskiverne K og L er begyndelsen til en tredje etage, men denne er i sin ufuldstændige stand endnu ikke stabil. Skiven K har dog allerede den virkning, at den støtter dækskiven J mod lodrette nedbøjninger, mens skiven L støtter skiven K mod foldning.

Vurdering af en forelagt skivekonstruktion

I det foregående er beskrevet, hvorledes man er i stand til successivt at opbygge en konstruktion, der er i stabil ligevægt.

Oftere står man imidlertid over for den omvendte opgave: at skulle vurdere, hvorvidt en forelagt skivekonstruktion er i stabil ligevægt. Dette kan naturligvis i princippet gøres ved at gennemgå de enkelte konstruktionslementer og se, om de hver især er understøttet langs tre faste støttelinier. Imidlertid

skal konstruktionerne ikke være ret komplicerede, før det begynder at blive svært at se, hvor man skal starte, og hvad vej, man skal gå. Et simpelt og dog effektivt middel til at finde eventuelle svage punkter ved en sådan forelagt konstruktion er da et bygge en primitiv, skitse-mæssig papmodel af konstruktionen og »prøvebelaste« den med fingeren.

Skitsemodeller

I forbindelse med undervisningen i skivekonstruktioner på arkitektskolerne

i København og Århus har de studerende arbejdet med skitse-mæssige papmodeller af skivekonstruktionerne for at vurdere disses stabilitet. Eksempel 11 og 12 omhandler sådanne skitsemodeller udført af arkitektstuderende på arkitektskolen i København [7].

Eksempel 11. Skitsemodel

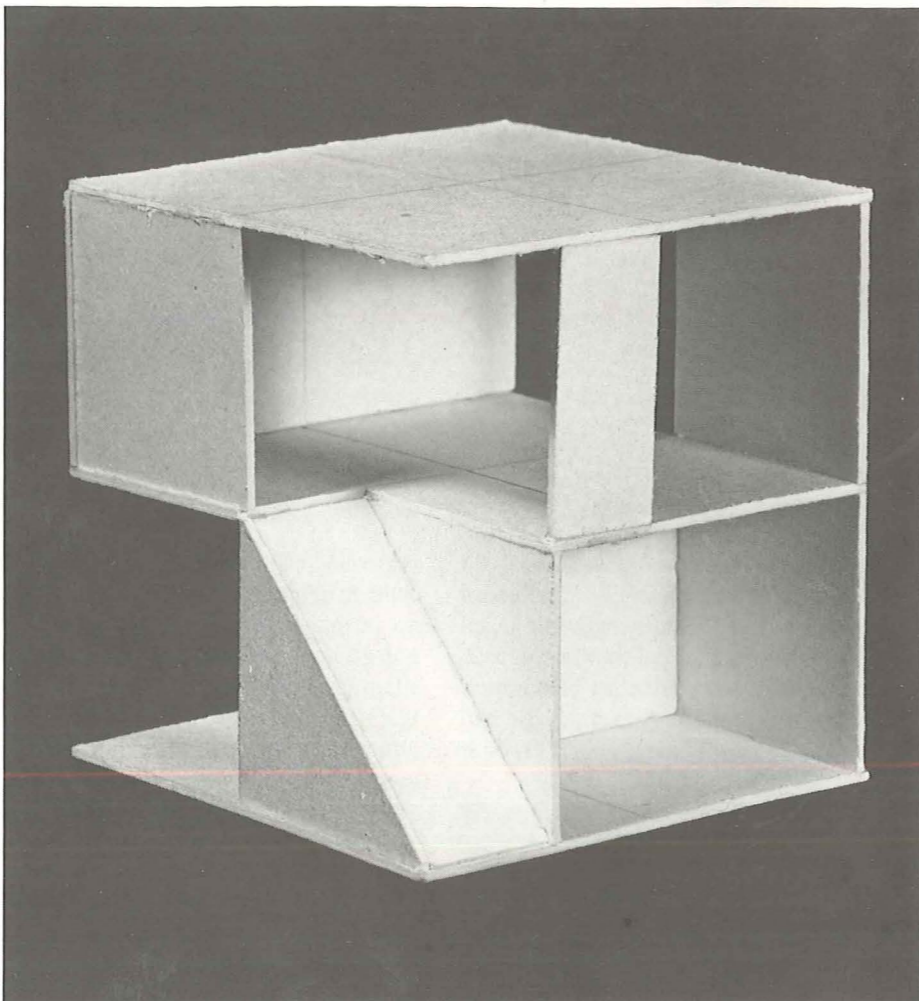
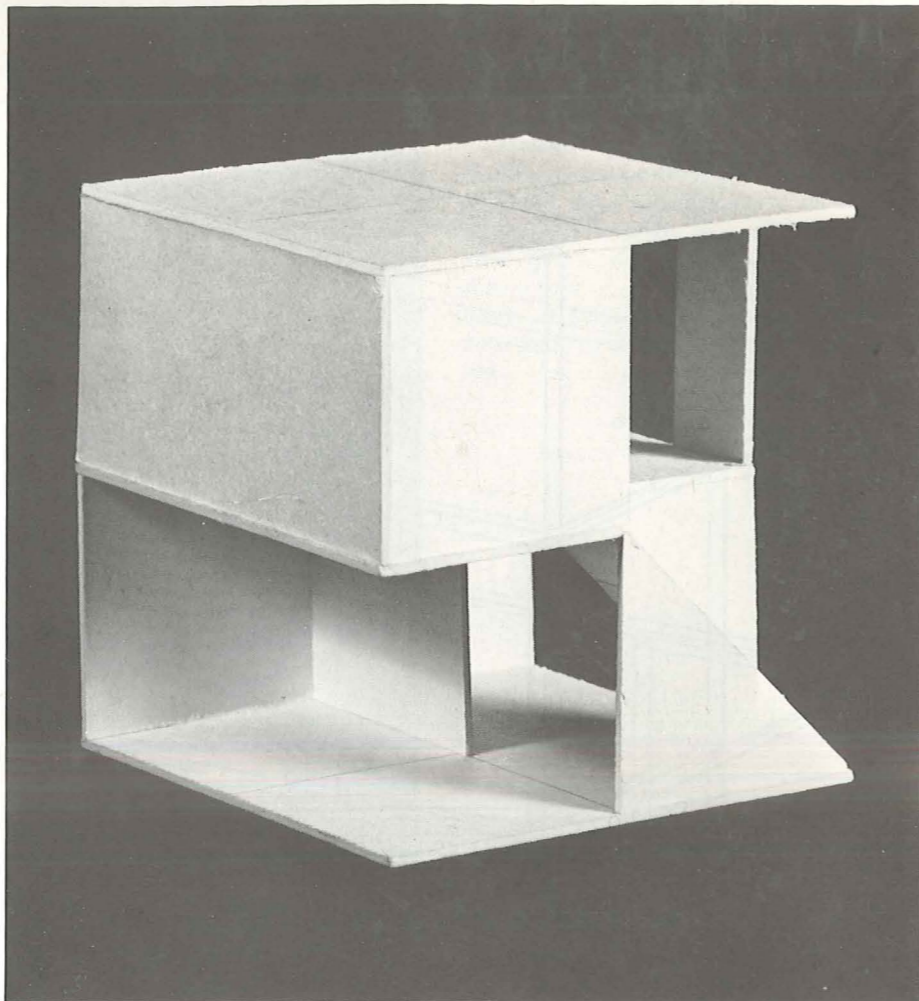
Konstruktionen, der er vist i figur 33 og 34, ses umiddelbart at være stabil. Papmodellen var da også af en meget robust og fast karakter og virkede nærmest som en lukket æske.

Eksempel 12. Skitsemodel

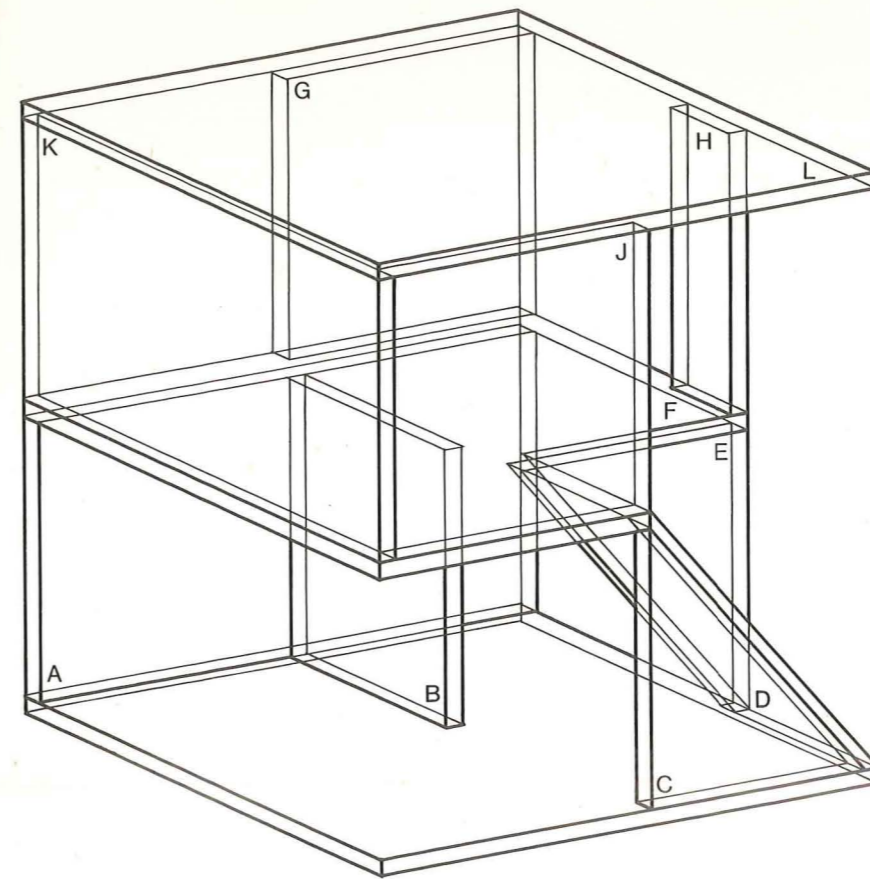
Konstruktionen, der er vist i figur 35 og 36, viste sig derimod at være bevægelig, idet man ved vandret belastning på den øverste dækskive eller lodret belastning over det frie hjørne i underetagen kunne fremkalde ret store deformationer i modellen. De studerende placerede derefter en søjle i det frie hjørne og fik derved en stabil konstruktion.

Erfaringerne fra disse kurser viser, at det med særdeles enkle midler er muligt at opnå en ganske god forståelse af betingelsen for stabil ligevægt, selv om der selvfølgelig intet kan siges om konstruktionens styrke (den fysiske betingelse) ud fra så primitive forsøg.

Den derved opnåede rumlige stabilitetsfølelse kan dog give et udgangspunkt for en konstruktionsopbygning, som kun vanskeligt kunne opnås ved en rent numerisk analyse.



Figur 35. De to fotografier viser en papmodel af en anden skivekonstruktion, udført ved samme lejlighed som modellen i figur 33.



Figur 36. »Røntgenbillede« af skitsemodellen på figur 35. Vægskiverne A, B, C og D forudsættes indspændte i fundamentet og kan derfor fungere som faste støttelinier for dækskiven F. Skiven E er kun punktunderstøttet og kan derfor ikke optage vandrette kræfter fra F. Bemærk, at støttelinierne fra skiverne B og D er sammenfaldende. Af væggene i øverste etage er kun skive G statisk bestemt understøttet. Skiverne J og K kan tilsammen virke som en »knækket« vægskive og således præstere én fast støttelinie, jf figur 64. Men skive H er kun understøttet i ét punkt og kan derfor ikke optage vandrette kræfter. Øverste dækskive er derfor bevægelig.

I de foregående kapitler er beskrevet, hvorledes man ved hjælp af ligevægtsbetingelser og – ved statisk ubestemte skivekonstruktioner – visse øvrige antagelser kan bestemme de kræfter, der påvirker hver af skiverne i en given konstruktion. For at kunne vurdere, om skiven kan holde til påvirkningen, vil man derefter ofte bestemme *spændingerne* i skiven.

Spændinger kan principielt aldrig bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene, idet der kan opstilles vilkårligt mange spændingsfordelinger med en given resultant over en given flade. Man må derfor indføre nogle supplerende antagelser, ganske som ved beregning af snitkræfterne i en statisk ubestemt skivekonstruktion. Disse supplerende antagelser kan udtrykkes som fysiske og geometriske betingelser. De fysiske betingelser udtaler sig om sammenhængen mellem deformationer og spændinger i materialet, anskueliggjort ved materialets arbejdslinie, at skiven skal bevare sin indre sammenhæng, dvs at de enkelte skiveudsnits deformationer skal »passe« sammen med omgivelsernes deformationer.

Elasticitetsteori kontra plasticitetsteori

På figur 37 er vist en idealiseret arbejdslinie for et materiale. Hvis materialet i en given situation befinder sig på arbejdsliniens skrå gren, siges materialet at opføre sig *elastisk*. Hvis materialet derimod befinder sig på den vandrette gren, siges materialet at *flyde* eller at opføre sig *plastisk*.

Elasticitetsteoriens beregningsmetoder baserer sig på den antagelse, at materialet opfører sig elastisk i hele konstruktionen eller konstruktionsdelen. Deformationerne og dermed de geometriske betingelser får derfor betydning for spændingernes størrelse.

Plasticitetsteoriens beregningsmetoder baserer sig på den antagelse, at materialet opfører sig plastisk, således at de geometriske betingelser i en vis udstrækning suspenderes. Det er karakteristisk for plasticitetsteoriens metoder, at man

vælger enten en geometrisk mulig brudfigur (øvre værditeknikken) eller en statisk tilladelig spændingsfordeling (neder værditeknikken).

For en given konstruktion med en given belastning giver elasticitetsteorien således én og kun én spændingsfordeling, mens plasticitetsteorien giver mange mulige.

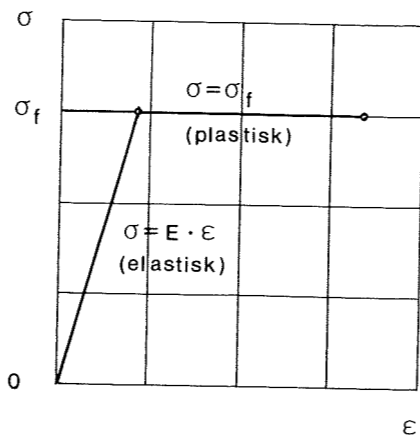
Elasticitetsteoriens beregningsmetoder benyttes især til at bestemme de spændinger, der optræder i konstruktionen, når den påvirkes af ydre kræfter svarende til dens tilsigtede brug. Plasticitetsteoriens beregningsmetoder benyttes især til at bestemme, hvilke kræfter, der vil fremkalde *brud* i konstruktionen.

En gennemført lineær elasticitetsteoretisk dimensionering kræver, at materialet får samme elasticitetskoefficient for træk og tryk. Dette indebærer meget høje armeringsprocenter og meget lave armeringspændinger, altså en uøkonomisk udførelse, som ikke er rimeligt begrundet i konstruktive forhold.

Dimensionering af *skivetværnsnit* i armeret beton foregår derfor altid efter et plasticitetsteoretisk princip, idet man uden hensyntagen til deformationerne indlægger armering til optagelse af træk- og forskydningskræfterne, mens betonen regnes at optage trykkræfterne. Dette gælder, hvad enten snitkræfterne pr længdeenhed bestemmes efter elasticitetsteorien (homogent skivetværnsnit forudsat) eller ej. Til bestemmelse af den nødvendige armering og den største betontrykspænding i et punkt med kendt spændingstilstand (snitkræfter pr længdeenhed divideret med skivetykkelsen) er der opstillet formler i [10], kapitel IV.

Ved bestemmelse af snitkræfter pr længdeenhed efter plasticitetsteorien benyttes normalt den såkaldte *neder værditeknik*. Den kaldes således, fordi de bæreevner, der findes, er nedre værdier for de virkelige bæreevner.

Neder værditeknikken går ud på at vælge en *statisk tilladelig spændingsfordeling*, det vil her sige en fordeling af snitkræfter pr længdeenhed, som opfylder ligevægtsbetingelserne. Derefter dimensioneres tværsnittene således, at disse snitkræfter kan optages, jf det ovenstående.



Figur 37. Ved beregning af snitkræfter og spændinger i en konstruktion forudsætter man normalt en meget simpel sammenhæng mellem spændinger og tøjninger (relative deformationer). De almindeligste antagelser er:

- 1) Idealelastisk materiale: spændingen er proportional med tøjningen, $\sigma = E \cdot \epsilon$.
- 2) Idealplastisk materiale: spændingen er uafhængig af tøjningen, $\sigma = \sigma_f$.

I visse tilfælde anvender man endvidere en kombination af disse to antagelser, således at arbejdslinien bliver som vist. For små tøjninger, $\epsilon \leq \sigma_f/E$, regnes materialet ideal-elastisk, mens det for større tøjninger regnes idealplastisk.

Ved en sådan beregning sikrer man sig teoretisk set, at en belastning, der svarer til den valgte spændingsfordeling, er mindre end eller lig med brudlasten, dvs beregningsmetoden er på den sikre side. Det er dog en forudsætning, at den nødvendige spændingsomlejring fra brugstilstandens (elasticitetsteoriens) spændinger til brudtilstandens kan ske, dvs at konstruktionen virkelig kan deformere sig tilstrækkeligt uden spændingsfald de steder, hvor flydning forudsættes at ske, og at de områder af konstruktionen, der eventuelt ikke kan flyde, på intet tidspunkt belastes til brud. Endvidere er det en forudsætning, at der ikke optræder stabilitetsbrud (store udbøjninger vinkelret på skivens plan).

I jernbetonbjælker og -plader, hvor armeringens flydespænding og armeringen i det hele taget er afgørende for bæreevnen, er betonens ringere deformationsevne uden større betydning for opnåelse af brugbare resultater ved hjælp af plasticitetsteorien.

I skiver, hvor betonens trykstyrke i mange tilfælde er af større betydning end ved bjælker og plader, må der udvises særlig forsigtighed, hvorfor det er nødvendigt, at de spændingsfordelinger, der lægges til grund for bestemmelse af den nødvendige armering, er eksperimentelt verificerede som brugbare eller ligger tæt ved spændingsfordelingerne fra en elasticitetsteoretisk beregning.

En statisk tilladelig spændingsfordeling til brug for en plasticitetsteoretisk dimensionering kan naturligvis specielt findes ved hjælp af elasticitetsteorien.

For rektangulære skiver uden huller og med almindeligt forekommende belastnings- og understøtningsmønstre er spændingsfordelingerne efter elasticitetsteorien angivet flere steder i litteraturen, fx i [9]. Ved mere specielle udformninger eller belastninger af skiven kan en tilnærmet elasticitetsteoretisk spændingsfordeling bestemmes ved hjælp af elementmetoden, se fx [11].

Til brug for en plasticitetsteoretisk dimensionering er den elasticitetsteoretiske spændingsfordeling dog ofte upraktisk. Dels er bestemmelsen af spændingerne ofte meget besværlig, dels medfører metoden normalt, at den nødvendige armeringsgrad varierer kraftigt over skiven.

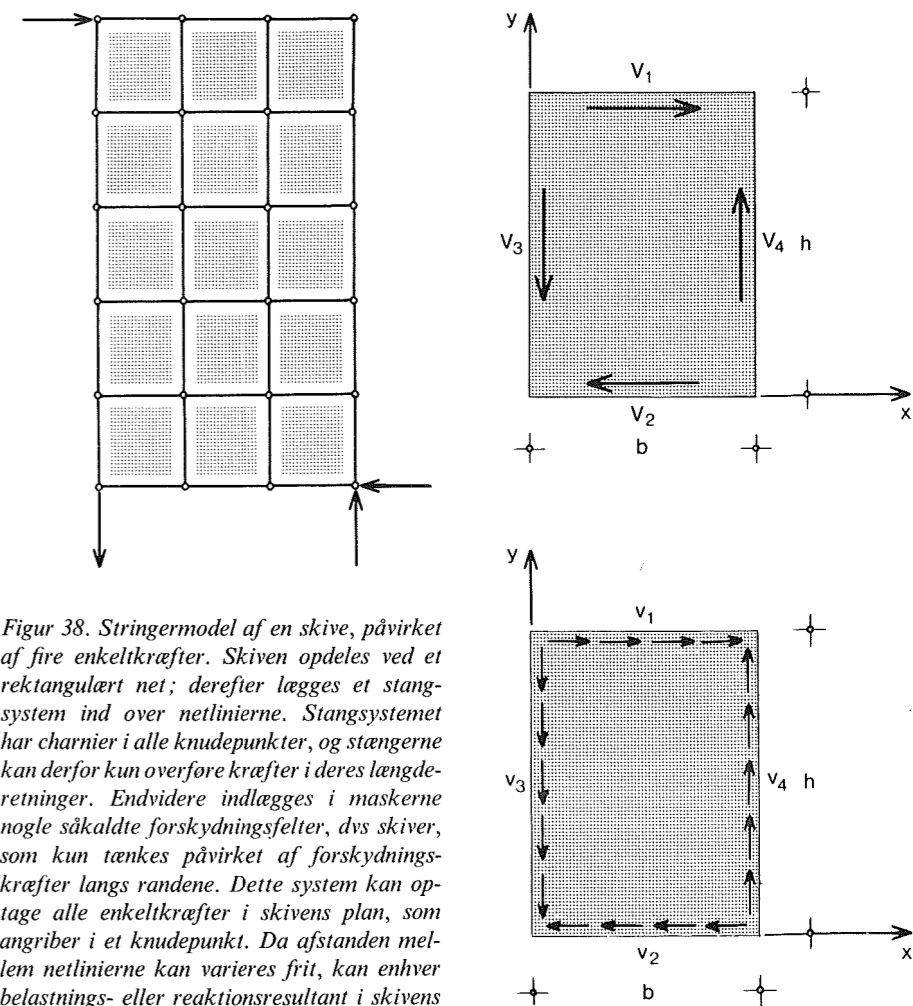
I [10], afsnit 6.3, er angivet en række andre statisk tilladelige spændingsfordelinger for rektangulære skiver med forskellige belastnings- og understøtningsmønstre. Anvendeligheden af disse spændingsfordelinger er i udstrakt grad eksperimentelt verificeret, se [10], kapitel VII. Princippet i en del af fordelingerne er, at skiven opdeles i et antal zoner, og at spændingstilstanden er konstant inden for hver zone for sig.

En speciel anvendelse af dette princip har man i stringermodellen, som er interessant på grund af sin simpelhed. Den giver muligvis ikke så gunstige spændingsfordelinger som de mere komplicerede modeller, men den er bekvem at anvende, specielt også ved skiver med uregelmæssig form. Resten af dette kapitel handler derfor om stringermodellen og nogle af dens anvendelser.

Stringermodellen

For en skive med rektangulær konfiguration, dvs med begrænsningslinier, der alle er parallelle med eller står vinkelret på en given linie, opbygges stringermodellen ved, at skivefladen opdeles i et rektangulært maskenet.

I netlinierne indlægges et stangsystem (gitterværk) med charnier i alle knude-



Figur 38. Stringermodel af en skive, påvirket af fire enkeltkræfter. Skiven opdeles ved et rektangulært net; derefter lægges et stangsystem ind over netlinierne. Stangsystemet har charnier i alle knudepunkter, og stængerne kan derfor kun overføre kræfter i deres længderetninger. Endvidere indlægges i maskerne nogle såkaldte forskydningsfelter, dvs skiver, som kun tænkes påvirket af forskydningskræfter langs randene. Dette system kan optage alle enkeltkræfter i skivens plan, som angriber i et knudepunkt. Da afstanden mellem netlinierne kan varieres frit, kan enhver belastnings- eller reaktionsresultant i skivens plan bringes til at angribe i et knudepunkt.

Figur 39. Øverst er vist et plant, rektangulært forskydningsfelt, påvirket af forskydningskræfter langs randene.

Nederst er forskydningskræfterne tænkt påført som ensformigt fordelte kræfter pr længdeenhed. Da forskydningsfeltet skal være i ligevægt, viser det sig, at forskydningskraften pr længdeenhed må være den samme langs alle fire sider.

Rektangulære forskydningsfelter

Der betragtes et plant, rektangulært forskydningsfelt med bredden b og højden h , se figur 39 øverst.

Forskydningsfeltet er påvirket af rene forskydningskræfter, V , langs periferien. Disse betegnes V_1 , V_2 , V_3 og V_4 . Ifølge stringermodellens antagelser er forskydningspændingerne konstante, hvilket i første omgang skal forstås således, at hver af forskydningskræfterne fordeles ensformigt over vedkommende kant, således at forskydningskræfterne pr længdeenhed, v , er konstante langs hver kant for sig. Altså er, jf figur 39 nederst,

$$v_1 = \frac{V_1}{b} \quad v_2 = \frac{V_2}{b}$$

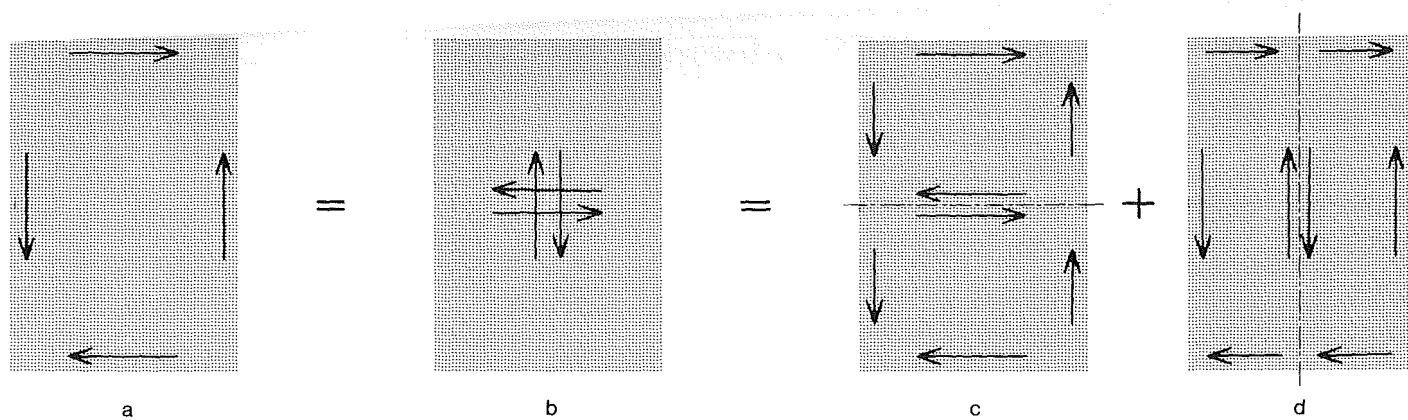
$$v_3 = \frac{V_3}{h} \quad v_4 = \frac{V_4}{h}$$

punkterne, se figur 38. Der indføres nu en art arbejdsdeling, således at der i netlinierne kun er træk- og trykkræfter, mens felterne mellem netlinierne er påvirket til ren forskydning med konstante forskydningspændinger.

I en sådan model af den virkelige skive betegnes netlinierne *stringere*, mens felterne mellem netlinierne betegnes *forskydningsfelter*.

Fremgangsmåden ved benyttelse af stringermodellen er den, at man først vælger forskydningspændingerne i hvert forskydningsfelt, således at den samlede forskydningskraft i snit parallelle med stringerne er korrekt. Herefter kan stringerkræfterne bestemmes ved hjælp af ligevægtsbetingelser.

Hvis nettet er tilstrækkeligt grovmasket, levner modellen kun én valgmulighed, idet alle forskydningspændingerne kan bestemmes direkte ved hjælp af ligevægtsbetingelser. Jo mere finmasket åbnes der for. Det forhold, at der på grund af det valgte nets grovhed kun er én mulighed, er naturligvis ingen garanti for, at den fundne spændingsfordeling er acceptabel i relation til konstruktionens flydemuligheder.



Figur 40. Forskydningsfelt med signaturer for forskydningskræfter og -spændinger.

a. De forskydningskræfter, der virker på et forskydningsfelt, vises normalt umiddelbart inden for den kant, de virker på.

b. Ved forskydningsfelter med konstante forskydningspændinger er det imidlertid ofte bekvemt at benytte dette krydsformede sym-

bol for forskydningspændingerne i feltet i stedet for at angive forskydningskræfterne på kanterne. Symbolet angiver ikke alene forskydningspændingerens tilstedeværelse, men også deres retninger eller, hvis spændingerne regnes med fortegn, retningerne for positive spændinger. Tolkningen af symbolets retningsangivelser fremgår af c og d.

c. Lægges et vandret snit i forskydningsfeltet, fås disse forskydningskræfter.

d. Og lægges et lodret snit, fås disse forskydningskræfter.

Det krydsformede symbol er altså fremkommet ved sammenlægning af forskydningskræfterne i de to snit gennem symbolet.

Idet skivens tykkelse sættes til 1, kan den uhåndterlige betegnelse »forskydningskraft pr længdeenhed« erstattes med betegnelsen »forskydningspænding«.

Ved hjælp af ligevægtsbetingelser kan de fire nævnte forskydningspændingers indbyrdes størrelsesforhold bestemmes.

Projektion på x-aksen:

$$V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

Projektion på y-aksen:

$$V_3 - V_4 = 0 \Rightarrow v_3 = v_4$$

Moment om aksernes skæringspunkt:

$$V_1 \cdot h - V_4 \cdot b = 0 \Rightarrow v_1 = v_4$$

Det ses altså, at $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, og at forskydningskræfterne løber sammen i diagonalt beliggende hjørner.

Ved at opdele forskydningsfeltet ved hjælp af snit parallelle med kanterne, og indføre forudsætningen om ensformigt fordelte spændinger langs hvert snit, kan det meget let vises, at der på alle snit parallelle med de to kanter virker forskydningspændinger af størrelsen v_1 .

Fra teorien om plan spændingstilstand vides i øvrigt, at der på snit i alle andre retninger virker forskydningspændinger, der er mindre, men endvidere normalspændinger. De største og de mindste normalspændinger, hovedspændingerne, findes på snit, der danner vinkler på 45° med forskydningsfeltets kanter. På disse snit er forskydningspændingerne nul. Spændingerne på et vilkårligt snit kan bekvemt findes ved hjælp af Mohr's cirkel, se fx [3], artiklen »Plan spændingstilstand«.

Det fremgår af det ovennævnte, at spændingstilstanden i et rektangulært forskydningsfelt kan angives éntydigt ved størrelse og retning for de konstante

forskydningspændinger på snit parallelle med kanterne. Retningerne angives i det følgende ved hjælp af det symbol, der er vist i figur 40.

I mange tilfælde kan man med fordel indføre en fortegnregel, således at forskydningspændingerne i stedet kan angives ved størrelse og fortegn.

Eksempel 13. Simpelt understøttet vægskive med lodret enkeltkraft

I figur 41 er vist en simpelt understøttet vægskive, stabiliseret af to dækskiver og belastet af en lodret enkeltkraft.

Figur 42 viser en stringermodel af vægskiven bestående af et net med to masker. Vægskivens tykkelse er t . Forskydningsfelternes spændinger kan bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene, idet der lægges lodrette snit gennem hvert forskydningsfelt. Projektion på lodret giver da: $v = P/h$, eller forskydningspændingen $\tau = P/ht$. Kraften i de vandrette stringere varierer lineært fra Pa/h i midten til nul ved endefladerne, idet den øverste stringer er en trykstringer og den nederste en trækstringer. Kraften i de lodrette stringere ved endefladerne varierer lineært fra nul foroven til P forneden, mens kraften i den midterste lodrette stringer varierer fra $2P$ foroven til nul forneden. Alle de lodrette stringere er trykstringere.

Løsningen kræver altså en koncentreret trækarmring i undersiden og en jævnt fordelt forskydningsarmering i hele skiven.

Dette eksempel skal primært tjene til at illustrere fremgangsmåden ved benyttelse af stringermodellen. For en rektangulær vægskive, der er simpelt un-

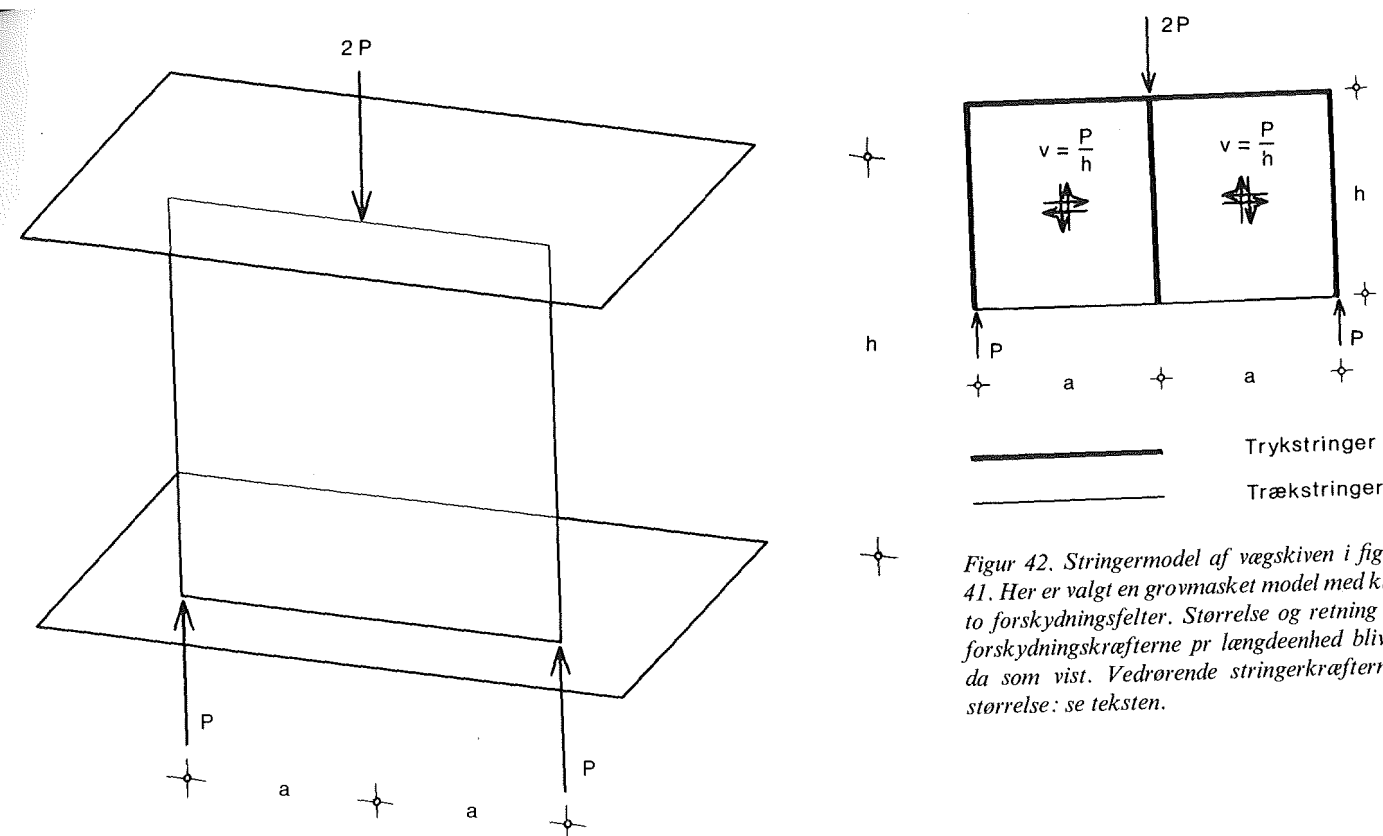
derstøttet på undersiden og lodret belastet på oversiden, fås en mere økonomisk dimensionering ved anvendelse af den såkaldte buemodel, se fx [10], afsnit 6.3.2. Buemodellen giver samme vandrette træk i skivens underside, men har en passende stor højde i forhold til spændvidden, idet erfaringerne fra bjælker viser, at ved flade buer er betonens flydeevne ikke tilstrækkelig til, at forskydningsbrud undgås. Se også [10], side 141 og side 243.

Eksempel 14. Uregelmæssigt formet dækskive

På figur 43 er vist en dækskive fra en konstruktion med bl.a. udkragede vægge. Skiven er påvirket af de viste otte kræfter, som dels svarer til de udkragede vægges vandrette reaktioner for lodret last, dels er skivens reaktioner fra de gennemgående, bærende vægge. Skiven er derfor i ligevægt.

Hvis stringermodellen anvendes, og hvis skiven opdeles i kun fire felter som vist, er der kun én mulig spændingsfordeling, og den kan bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene.

Under opstilling af ligevægtsbetingelserne er det praktisk at vælge en fortegnregel for forskydningspændinger. Her er eksempelvis valgt, at forskydningspændingerne er positive, når de svarer til positive forskydningskræfter i en vandret bjælke. Forskydningskræfterne pr længdeenhed i hhv felt 1, 2, 3 og 4 kaldes v_1, v_2, v_3 og v_4 , og de resulterende forskydningskræfter langs kanten af hvert felt kaldes $V_{1y}, V_{1x}, V_{2y} \dots$ osv.



Figur 41. Simpelt understøttet vægskive, belastet af en lodret enkeltkraft og stabiliseret af to dækskiver, hvoraf udsnit er vist.

Opstilling af ligevægtsbetingelserne (projektion på snittets retning) tager sig herefter således ud:

Felt 1, »lodret snit«:

$$V_{1y} = -15 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$v_1 = -\frac{15}{1,85} = -8,1 \text{ kN/m}$$

$$V_{1x} = -8,1 \cdot 2,15 = -17 \text{ kN}$$

Felt 4, »lodret snit«:

$$V_{4y} = -18 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$v_4 = -\frac{18}{1,25} = -14,4 \text{ kN/m}$$

$$V_{4x} = -14,4 \cdot 0,90 = -13 \text{ kN}$$

Felt 1 og 2, »vandret snit«:

$$V_{1x} + V_{2x} + 4 \text{ kN} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{2x} = 13 \text{ kN}$$

$$v_2 = \frac{13}{1,20} = 10,8 \text{ kN/m} \Rightarrow$$

$$V_{2y} = 10,8 \cdot 1,85 = 20 \text{ kN}$$

Felt 3 og 4, »vandret snit«:

$$V_{3x} + V_{4x} + 83 \text{ kN} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{3x} = -70 \text{ kN}$$

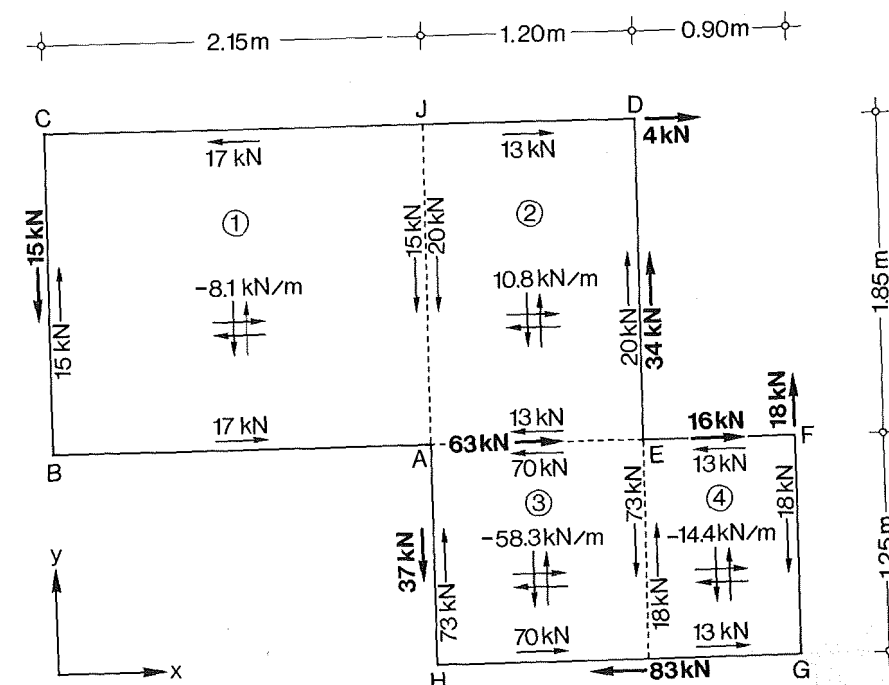
$$v_3 = -\frac{70}{1,20} = -58,3 \text{ kN/m} \Rightarrow$$

$$V_{3y} = -58,3 \cdot 1,25 = -73 \text{ kN}$$

Kontrol: felt 2 og 3, »lodret snit«:

$$V_{2y} + V_{3y} + 15 \text{ kN} + 37 \text{ kN} =$$

$$20 - 73 + 15 + 37 = -1 \text{ kN} \approx 0.$$

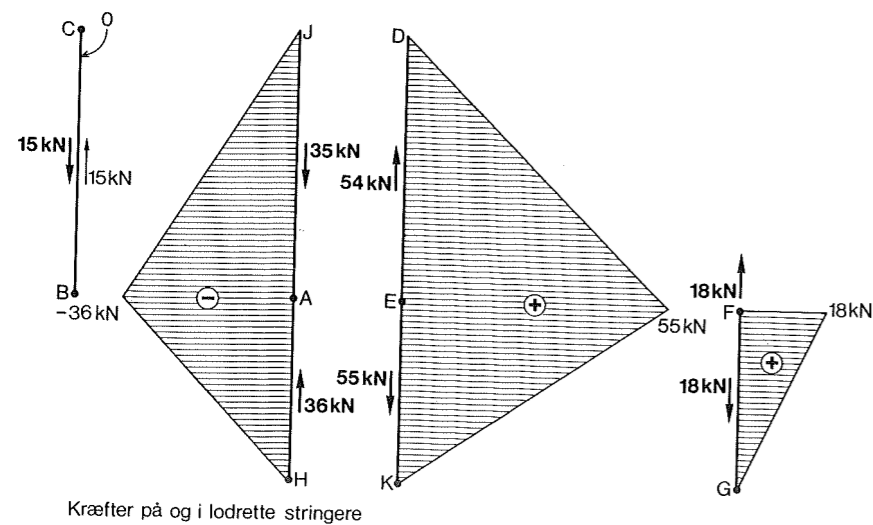
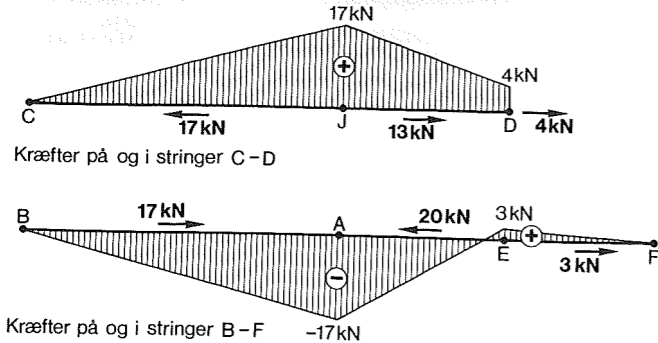


Symboler:

- ① Nummerering af forskydningsfelt.
- Ydre påvirkning på skiven.
- Forskydningsfelts påvirkning på stringer.
- ⊕ Forskydningskræfter pr. længdeenhed i forskydningsfelt, regnet positive som vist.

Figur 43. Den viste skive er påvirket af et kraftsystem i ligevægt (de kraftige pile). Ved anvendelse af stringermodellen og opdeling af skiven i fire felter kan spændingsfordelingen bestemmes ved ligevægtsligninger

alene. Figuren viser forskydningskræfterne pr længdeenhed i forskydningsfelterne, samt forskydningskræfterne langs forskydningsfelternes kanter (de tynde pile).



Figur 44. De seks stringere fra skiven i figur 43. Ved hver stringer er vist stringerens påvirkninger og den heraf følgende stringerkraftkurve. Stringerkrafter er regnet positive som træk. Principielt skal summen af de kræfter, der påvirker en given stringer, være nul. At dette tilsyneladende ikke er tilfældet for stringerne JH og DK, skyldes kun afrundings-
unøjagtigheder.

Herefter kan de enkelte stringere tegnes og påføres forskydningskræfter. Endelig kan normalkraftkurverne for stringerne bestemmes. Se figur 44.

I en armeret betonkonstruktion skal stringertrækkrafterne optages af armering, placeret i nærheden af vedkommende stringer, mens stringertrykkrafterne skal optages af betonen i en passende zone omkring trykstringeren.

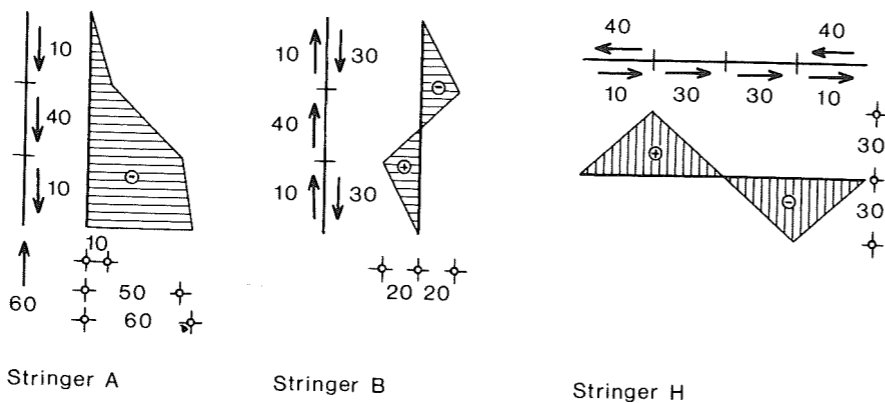
Omkring punkt E skal der derfor indlægges armering, der kan optage et træk på 55 kN. Denne armering skal forankres på strækningen EK.

Omkring punkt A forekommer de største trykspændinger i betonen. Hvis skivens tykkelse er 0,1 m, og trykzonens bredde antages at være 0,3 m, bliver trykspændingen i betonen

$$\sigma'_b = \frac{36 \text{ kN}}{0,1 \cdot 0,3 \text{ m}^2} = 1,2 \text{ MN/m}^2$$

Største forskydningspændinger i betonen forekommer i felt 3, hvor

$$\tau_b = \frac{58,3 \text{ kN}}{0,1 \text{ m}^2} = 0,6 \text{ MN/m}^2$$

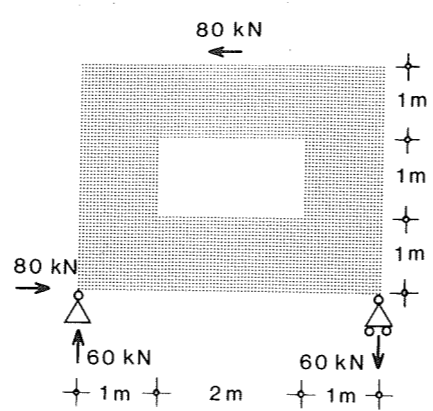


Figur 47. Stringerkrafter i tre af stringerne fra figur 46. Positive stringerkrafter er trækkræfter, og enheden er kN.

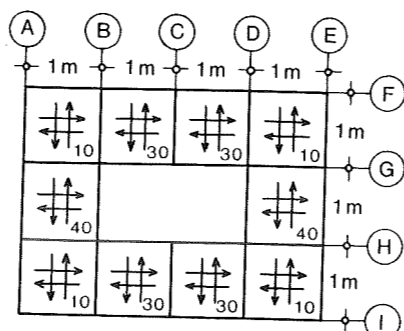
Eksempel 15. Rektangulær skive med åbning

På figur 45 er vist en rektangulær, simpelt understøttet skive med et rektangulært hul. Det kan fx være et facadeudsnit med en vinduesåbning. Eksemplet viser beregning af spændingerne ved hjælp af stringermodellen.

Skiven inddeles i $3 \cdot 4 = 12$ felter, hvoraf åbningen udgør to. Ved at indlægge vandrette og lodrette snit og opstille projektligninger, samt ved at vælge fordelingerne af forskydnings-



Figur 45. Denne vægskive, som er forsynet med en åbning, er simpelt understøttet og påvirket af en vandret kraft på 80 kN foroven, hvilket medfører de viste reaktioner.

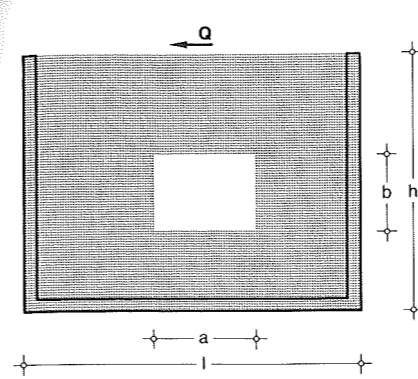


Figur 46. Ved hjælp af denne stringermodel af skiven i figur 45 kan man bestemme en statisk tilladelig spændingsfordeling. Ydre påvirkning og reaktioner er ikke vist, og snitkræfterne er angivet i kN/m.

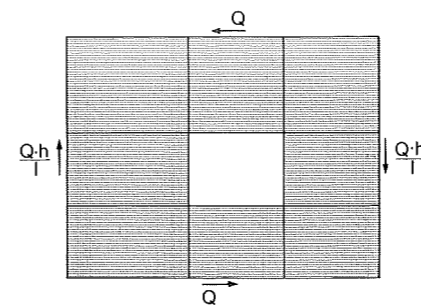
kræfter på felterne, bestemmes forskydningskraften pr længdeenhed i hvert felt, se figur 46.

Herefter kan stringerkrafterne bestemmes. Stringerkraftkurverne for stringer A, B og H er vist i figur 47.

Bemærk, at der ikke kan komme kræfter i stringerne i linie C, da de kun er én maskevidde lange og ikke belastet i enderne. Forskydningskræfterne pr længdeenhed i forskydningsfelterne på begge sider af en sådan stringer må være ens. Stringerne i linie C kan derfor udelades.



Figur 48. Denne vægskive kan regnes påvirket af ensformigt fordelte forskydningskræfter pr længdeenhed langs kanten.

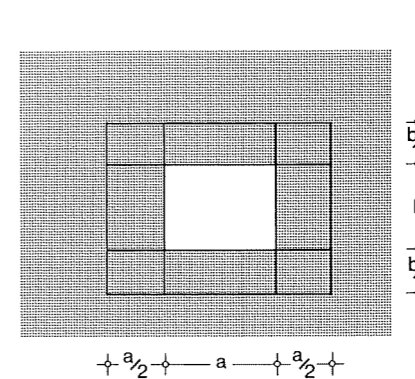


Figur 49. En statisk tilladelig spændingsfordeling kan findes ved hjælp af denne stringermodel, som svarer til figur 46.

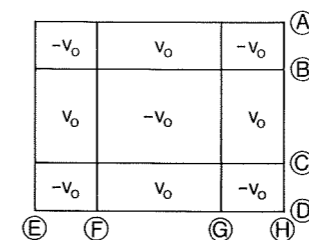
Eksempel 16. Rektangulær skive med mindre åbning

På figur 48 er vist en rektangulær skive med en relativt lille rektangulær åbning. Skiven understøttes af faste støttelinier langs de tre kanter og belastes langs den fjerde kant af en forskydningskraft Q , der kan regnes ensformigt fordelt langs hele kantens længde. Spændingerne i skiven skal bestemmes ved hjælp af stringermodellen.

Reaktionerne fra støttelinierne bestemmes ved opstilling af ligevægtsbetingelser for hele skiven (projektion på vandret, moment om et hjørnepunkt, projektion på lodret), og derefter op-



Figur 50. Hvis åbningen er relativt lille, kan en simple og bedre spændingsfordeling findes ved først at antage konstante forskydningskræfter pr længdeenhed, v_0 , i hele skiven, incl åbningen. Herefter skal forskydningspændingerne i åbningen erstattes af tillægs-spændinger i skiven i en zone omkring åbningen. Dette kan gøres ved hjælp af den viste stringermodel.



Figur 51. Ændringsfordelingen, eller de forskydningskræfter pr længdeenhed, som skal overlejres den første fordeling. Forskydningspændingerne regnes positive som vist.

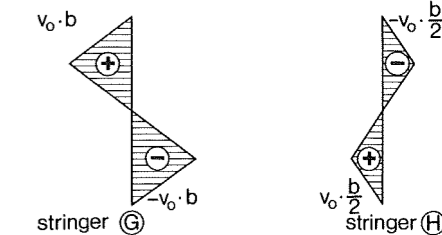
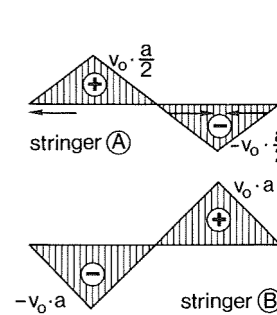
deles skiven i 9 felter, hvoraf åbningen udgør det ene, se figur 49.

Herefter kan forskydningskræfter pr længdeenhed samt stringerkrafter bestemmes som angivet i eksempel 15.

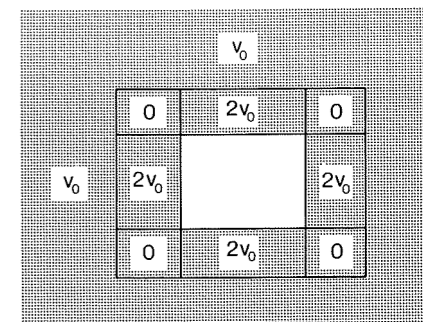
Ved hjælp af en anden stringermodel, som her skal vises, kan man dels opnå simple regninger, dels opnå en måske rimeligere spændingsfordeling.

I første omgang opfattes hele skiven som ét forskydningsfelt, dvs forskydningspændingerne pr længdeenhed er overalt $v_0 = Q/l$ - også i åbningen! Derefter overlejres denne spændingsfordeling med en »ændringsfordeling«, dvs en spændingsfordeling, som er i ligevægt i sig selv.

Da »forstyrrelserne« i spændingsfor-



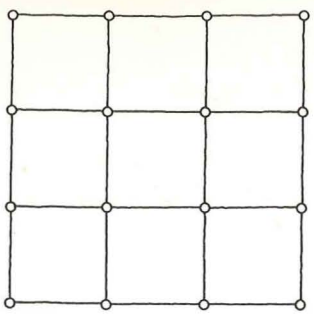
Figur 52. Stringerkrafter i fire af stringerne fra figur 51. Trækkrafter regnes positive.



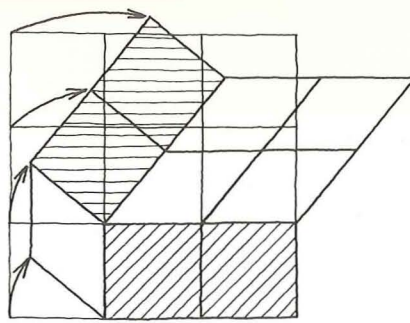
Figur 53. Den endelige forskydningskraftfordeling, som opstår ved overlejring af fordelingerne i figur 50 og 51.

delingen kan antages at være de største i nærheden af åbningen, udstrækkes ændringsfordelingen kun over et område, der dækker åbningen og dens nærmeste omgivelser. Der indlægges et stringersystem med ni felter som vist på figur 50.

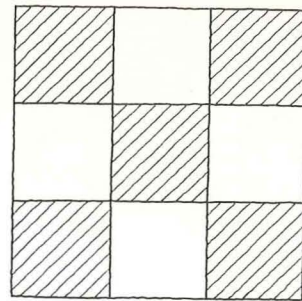
I figur 51 er dette stringersystem trukket ud. Da spændingsfordelingen skal være i ligevægt i sig selv, er der ikke påført ydre kræfter. I midterfeltet sættes forskydningskræfterne pr længdeenhed til $-v_0$, hvorefter resten af systemet kan regnes igennem på normal vis. Resultaterne heraf er vist i figur 51 og figur 52. I figur 53 er de resulterende forskydningspændinger for hele skiven vist.



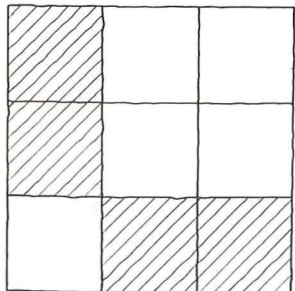
Figur 54. Stringermodel uden forskydningsfelter. Modellen er bevægelig.



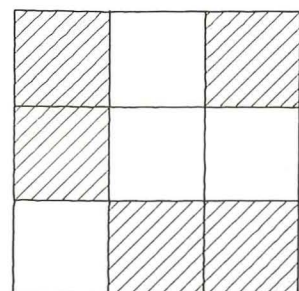
Figur 56. ... er modellen stadig bevægelig.



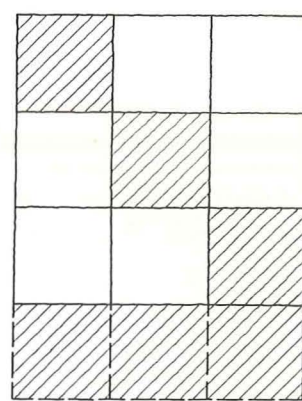
Figur 58. I en 3x3 felters stringermodel skal der mindst være 5 forskydningsfelter, for at modellen kan være stiv. Betingelsen er dog ikke tilstrækkelig; den viste model er således bevægelig.



Figur 55. Hvis fire felter udfyldes ...



Figur 57. Med fem udfyldte felter kan modellen stabiliseres.



Figur 59. Hvis modellens ene side er fastholdt, er det tilstrækkeligt at placere et forskydningsfelt i hver række parallelt med den fastholdte side. Fastholdelsen kan erstattes af en række forskydningsfelter, men det er naturligvis så en forudsætning, at modellen - lige som de foregående modeller - understøttes på en eller anden måde for at kunne optage en belastning.

Eksempel 17. Stabilisering af et stringernet

De to foregående eksempler viste, at nogle af forskydningsfelterne i en stringermodel kan være erstattet af åbninger. Dette eksempel behandler spørgsmålet om, hvor mange af felterne i en stringermodel der skal være udfyldte med forskydningsfelter, for at modellen er i stabil ligevægt.

På figur 54 er vist en stringermodel, hvor ingen af felterne er udfyldte. Stringerne kan fx tænkes at repræsentere et system af bjælker, og spørgsmålet er, hvor mange felter der skal forsynes med dækskiver, før hele dækket virker som

én skive, der kan fastholde alle bjælkerne i forhold til hinanden.

Først forsøges med fire forskydningsfelter, således at én række er udfyldt på ét felt nær og én søjle er udfyldt på ét felt nær, se figur 55.

Det ses, at dette er ikke tilstrækkeligt til at gøre konstruktionen til en stiv skive: konstruktionen kan sakse sammen, hvorved de udfyldte kvadratiske felter vil deformeres til rhomber, se figur 56.

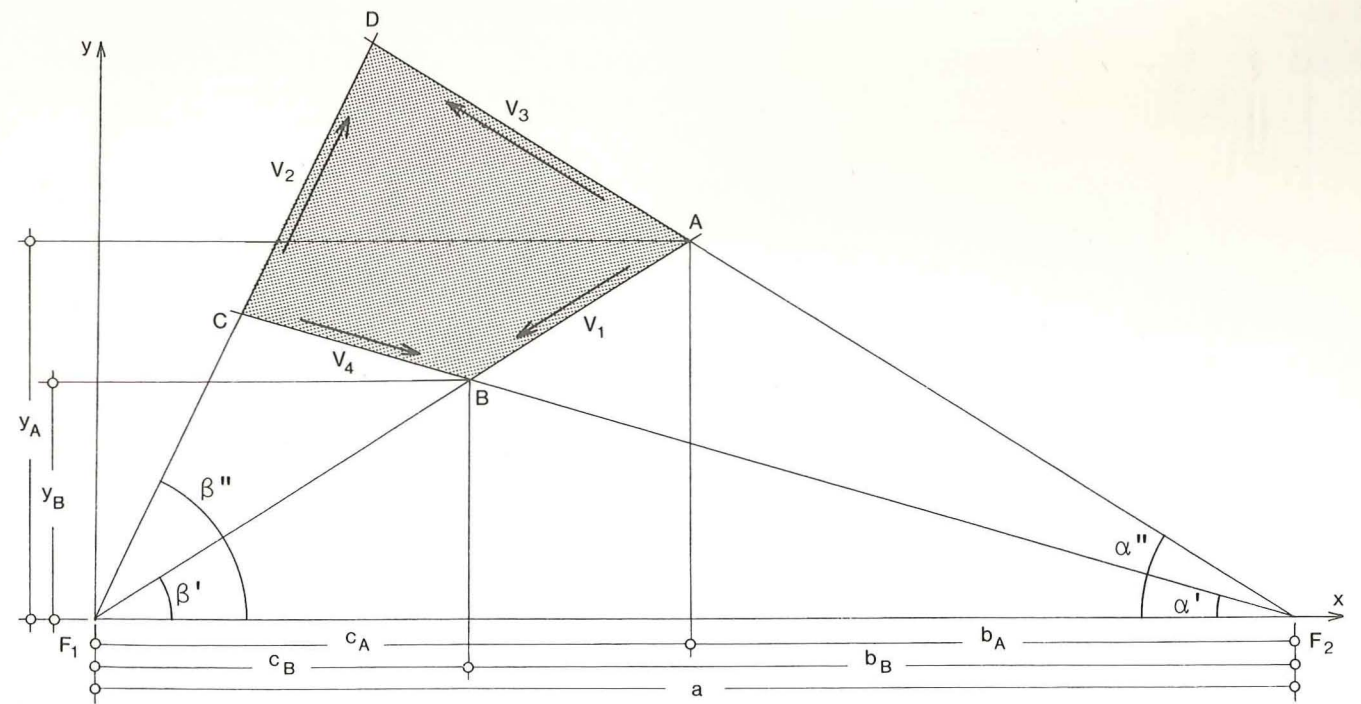
Forsynes konstruktionen imidlertid med et femte forskydningsfelt, ses det, at nu låses den fast, se figur 57.

Generelt ses det, at for en stringermodel med $r \cdot s$ felter er det nødvendigt,

at i alt $r+s-1$ felter er egentlige forskydningsfelter, hvis modellen ikke skal være bevægelig. Det skal bemærkes, at dette antal ikke altid er tilstrækkeligt.

Hvis fx de fem forskydningsfelter havde været valgt som vist på figur 58, havde konstruktionen først været stiv efter indsætning af et sjette forskydningsfelt.

Dersom en stringerkonstruktion af type som disse er fast forankret i et fundament, er kun ét forskydningsfelt nødvendigt for hver etage. Disse forskydningsfelter kan være tilfældigt placeret, idet fundamentet jo kan opfattes som en hel række af forskydningsfelter, se figur 59.



Figur 60. Plant, firkantet, skævvinklet forskydningsfelt. Feltet er påvirket af forskydningskræfterne V_1, V_2, V_3 og V_4 . En statisk tilladelig fordeling af disse kræfter over kan-

terne skal findes. Gennem de modstående siders skæringspunkter F_1 og F_2 indlægges en x -akse. Forskydningsfeltet er i ligevægt, når forsrydningsspændingerne langs kanterne er

omvendt proportionale med kvadratet på afstanden til x -aksen.

Firkantede forskydningsfelter af vilkårlig form

De foregående afsnit behandler retvinklede stringermodeller, dvs stringerdeller med rektangulære forskydningsfelter. Man kan naturligvis også opbygge skævvinklede stringersystemer efter samme princip: et plant stangsystem, som i første omgang optager belastningen, men som er opbygget af firkanter i stedet for som normalt af trekkanter, og som derfor må stabiliseres, samt et antal forskydningsfelter, som giver denne stabilisering og gør stangsystemet ubevægeligt, idet de optager forskydningskræfter på langs ad kanterne, men ingen normalkræfter vinkelret på kanterne.

Spændingsfordelingen i sådanne skævvinklede forskydningsfelter skal behandles i dette afsnit.

Det gælder om at bestemme en statisk tilladelig spændingsfordeling, dvs en spændingsfordeling, som gør, at såvel hele forskydningsfeltet som et vilkårligt udsnit af feltet er i ligevægt for de snitspændinger, der påvirker det. Endvidere skal spændingerne langs forskydningsfeltets kanter være rene forskydningspændinger. Principielt kan der opstilles vilkårligt mange forskellige

spændingsfordelinger, der opfylder de statiske betingelser, men her skal angives en, som er særlig simpel.

På figur 60 er vist et plant, firkantet forskydningsfelt $ABCD$, der antages at have tykkelsen 1. Skæringspunkterne for linierne langs modstående sider betegnes F_1 og F_2 . Forskydningskræfterne langs siderne betegnes V_1, V_2, V_3 og V_4 . De regnes positive som vist.

Det skal vises, at dersom forskydningspændingerne langs siderne er omvendt proportionale med kvadratet på afstanden til linien F_1F_2 , da er forskydningsfeltet i ligevægt.

Hypotesen er altså: $v = k/y^2$, hvor k er én konstant, fælles for alle forskydningsfeltets kanter. Forskydningskraften pr længdeenhed, v , regnes positiv i samme retning som den tilsvarende forskydningskraft V .

Først kontrolleres projektionssummen vinkelret på linien F_1F_2 .

Forskydningskræfternes komponenter vinkelret på linien F_1F_2 betegnes V_{1y}, V_{2y}, V_{3y} og V_{4y} . De regnes positive som vist i figur 61.

Med betegnelserne i figur 60 giver simple geometriske betragtninger

$$\frac{a}{y_B} - \frac{a}{y_A} = \frac{b_B + c_B}{y_B} - \frac{b_A + c_A}{y_A} =$$

$$\frac{b_B}{y_B} - \frac{b_A}{y_A} = \cotg \alpha' - \cotg \alpha'' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y_B} - \frac{1}{y_A} = \frac{1}{a} (\cotg \alpha' - \cotg \alpha'')$$

Antagelsen, at $v = k/y^2$, medfører

$$V_{1y} = V_1 \sin \beta' =$$

$$\int_B^A \frac{k}{y^2} ds \cdot \sin \beta' = \int_B^A \frac{k}{y^2} dy$$

hvor ds er et element af forskydningsfeltets sidelinie. Bestemmelse af integralet giver

$$V_{1y} = k \left(\frac{1}{y_B} - \frac{1}{y_A} \right) = \frac{k}{a} (\cotg \alpha' - \cotg \alpha'')$$

Analogt fås

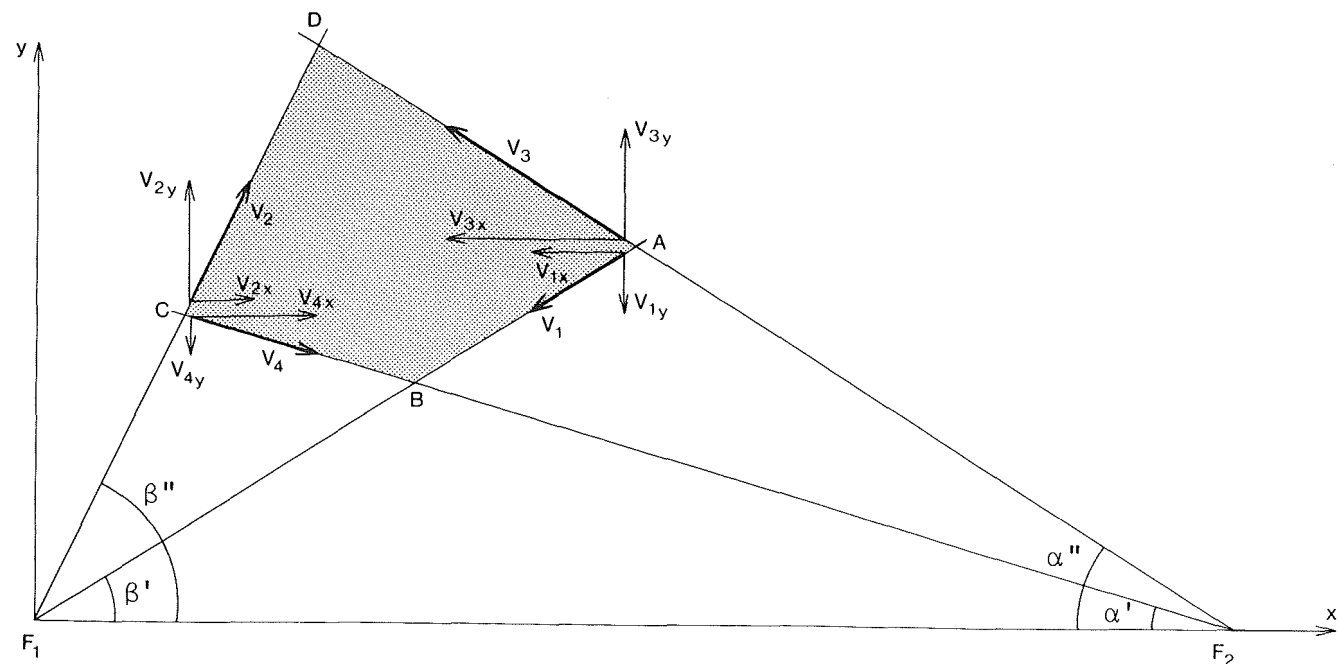
$$V_{2y} = \frac{k}{a} (\cotg \alpha' - \cotg \alpha'')$$

$$V_{3y} = \frac{k}{a} (\cotg \beta' - \cotg \beta'')$$

$$V_{4y} = \frac{k}{a} (\cotg \beta' - \cotg \beta'')$$

Projektion på y -aksens retning giver da

$$-V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} - V_{4y} = 0.$$



Figur 61. Fortegnsregler for forskydningskræfter og forskydningskraftkomponenter.

Herefter kontrolleres projektionssummen på linien F_1F_2 . Forskydningskræfternes komponenter parallelt med linien F_1F_2 betegnes V_{1x} , V_{2x} , V_{3x} og V_{4x} . De regnes positive som vist i figur 61. Ved hjælp af figur 61 ses, at

$$\begin{aligned} V_{1x} &= V_{1y} \cdot \cotg \beta' \\ V_{2x} &= V_{2y} \cdot \cotg \beta'' \\ V_{3x} &= V_{3y} \cdot \cotg \alpha' \\ V_{4x} &= V_{4y} \cdot \cotg \alpha'' \end{aligned}$$

Projektion på x -aksens retning giver da ved indsætning af ovenstående værdier for V_y

$$\begin{aligned} -V_{1x} + V_{2x} - V_{3x} + V_{4x} &= \\ \frac{k}{a}(\cotg \alpha' - \cotg \alpha'')(\cotg \beta'' - \cotg \beta') + \\ \frac{k}{a}(\cotg \beta' - \cotg \beta'')(\cotg \alpha' - \cotg \alpha'') &= 0 \end{aligned}$$

Endelig kontrolleres momentet om punkt F_1 .

Kræfterne V_1 og V_2 går gennem F_1 og giver derfor intet bidrag til momentet.

Kræfterne V_3 og V_4 forskydes til F_2 og sammensættes her til en resultant.

Da $V_{3y} = V_{4y}$, er resultantens y -komponent nul. Resultanten ligger derfor på linien F_1F_2 og giver således intet bidrag til momentet om F_1 .

Det er hermed vist, at forskydningsfeltet er i ligevægt, idet det er påvirket af et plant kraftsystem, der har projektionssummen nul på to ikke-parallelle linier og momentet nul i et punkt af planen.

Ved at opdele forskydningsfeltet ved hjælp af retlinede snit, som har retning

mod F_1 eller F_2 , kan det tilsvarende vises, at en spændingstilstand, som medfører at der på disse snit kun virker forskydningspændinger af størrelsen $v = k/y^2$, er statisk tilladelig.

Når spændingerne på to snit gennem et punkt kendes, kan spændingerne på alle andre snit gennem punktet findes ved hjælp af Mohr's cirkel. Det ses af Mohr's cirkel, at kun i punkter, hvor retningerne til F_1 og F_2 står vinkelret på hinanden, er de således fundne forskydningspændinger de største i punktet. For andre punkters vedkommende forekommer der større forskydningspændinger end k/y^2 – samt normalspændinger – i andre retninger, jf figur 62.

Eksempel 18. Trapezformet forskydningsfelt

Et plant, trapezformet forskydningsfelt som vist på figur 63 tænkes belastet med kraften $V_1 = 35$ kN, mens V_2 , V_3 og V_4 er reaktionerne, som ønskes bestemt.

To af de modstående siders skæringspunkt er F . De to andre modstående siders skæringspunkt ligger – rent formelt – uendelig langt ude til den ene side. Derfor indlægges x -aksen gennem F og parallelt med siderne AB og CD . Da x -koordinater ikke skal anvendes, kan x -aksens nulpunkt, og dermed y -aksen, placeres vilkårligt.

Idet forskydningskræfterne pr længdeenhed betegnes v , og sidelængderne s , begge med samme indices som forskydningskræfterne V , fås

$$v_1 = \frac{V_1}{s_1} = \frac{35 \text{ kN}}{3,5 \text{ m}} = 10 \text{ kN/m}$$

$$v_1 = k/y_1^2 \Rightarrow k = v_1 \cdot y_1^2 = 10 \cdot 2,8^2 = 78,4 \text{ kNm}$$

$$v_2 = k/y_2^2 = 78,4/1,2^2 = 54,5 \text{ kN/m}$$

$$V_2 = v_2 \cdot s_2 = 54,5 \cdot 1,5 = 82 \text{ kN}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1,6}{0,7} \Rightarrow \alpha = 66,4^\circ \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = 0,916$$

$$\text{tg } \beta = \frac{1,6}{1,3} \Rightarrow \beta = 51^\circ \Rightarrow$$

$$\sin \beta = 0,777$$

$$V_3 = \int_C^A \frac{k}{y^2} \cdot ds =$$

$$\int_C^A \frac{k}{y^2} \frac{dy}{\sin \alpha} = \frac{k}{\sin \alpha} \left[\frac{1}{y} \right]_A^C =$$

$$\frac{78,4}{0,916} \left(\frac{1}{1,2} - \frac{1}{2,8} \right) = 41 \text{ kN}$$

$$V_4 = \frac{k}{\sin \beta} \left[\frac{1}{y} \right]_B^D =$$

$$\frac{78,4}{0,777} \left(\frac{1}{1,2} - \frac{1}{2,8} \right) = 48 \text{ kN}$$

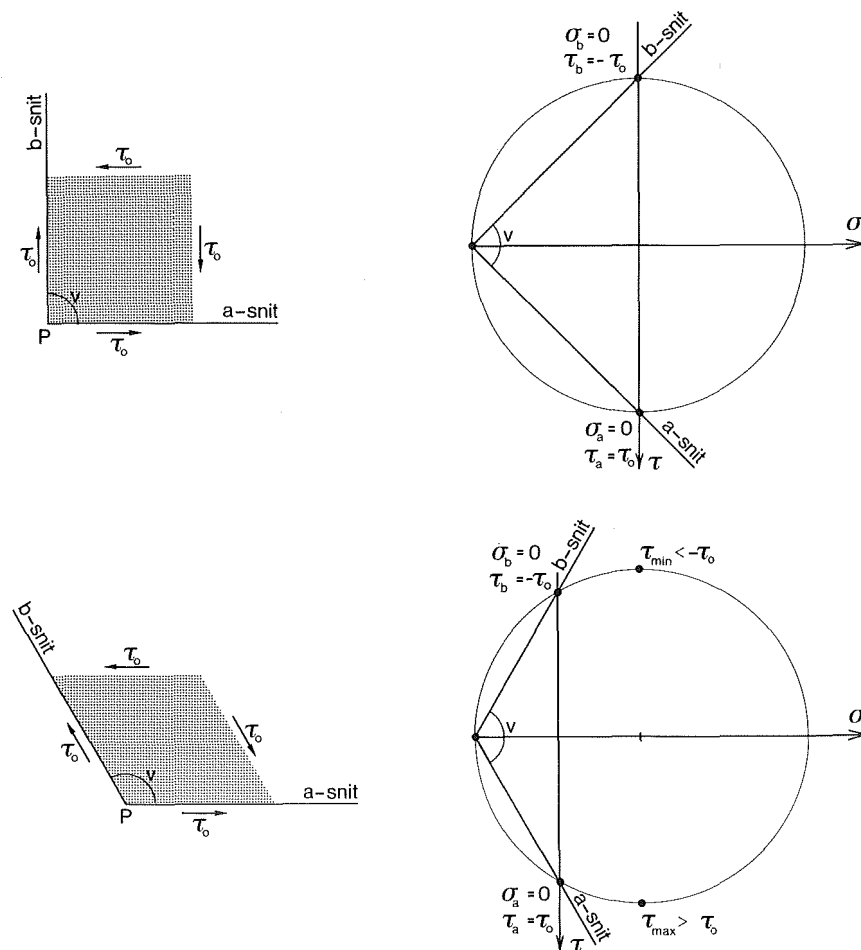
Reaktionerne bliver altså

$$V_2 = 82 \text{ kN}, V_3 = 41 \text{ kN} \text{ og } V_4 = 48 \text{ kN}$$

mens forskydningskræfterne pr længdeenhed bliver

$v_1 = 10$ kN/m langs hele kanten AB og langs de øverste dele af kanterne AC og BD .

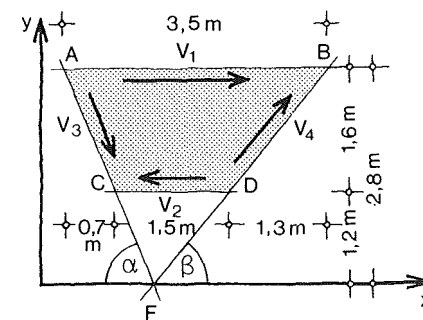
$v_2 = 54,5$ kN/m langs hele kanten CD og langs de nederste dele af kanterne CA og DB .



Figur 62. En plan spændingstilstand kan beskrives éntydigt ved hjælp af Mohr's cirkel, som også er et praktisk arbejdsredskab til bestemmelse af spændingstilstanden ud fra givne spændinger på givne snit, til bestemmelse af de numerisk største spændinger i et punkt, osv. Til venstre er vist to udsnit af et plant forskydningsfelt. Snittene er lagt i sådanne retninger, at der i dem kun virker forskydningspændin-

ger $\tau_0 = k/y^2$ (retningerne mod F_1 og F_2 på figur 60-61).

Til højre er vist de tilsvarende Mohr'ske cirkler. Mohr's cirkel har den egenskab, at hvert punkt på cirklen ved sine koordinater i σ - τ -koordinatsystemet angiver sammenhørende normal- og forskydningspændinger i det tilsvarende snit gennem punktet.



Figur 63. Trapezformet, plant forskydningsfelt, påvirket af kraften V_1 og reaktionerne V_2 , V_3 og V_4 . Gennem skæringspunktet F for de »skæve« siders forlængelser indlægges x -aksen parallelt med de to andre sider. Forskydningsfeltet er i ligevægt, når forskydningspændingerne langs kanterne er omvendt proportionale med kvadratet på afstanden til x -aksen.

Krumme konstruktionselementer med lille tykkelse i forhold til de øvrige udstrækninger har blandt andet været anvendt som tagkonstruktioner, idet man har udnyttet *skalvirkningen* til optagelse af kræfter på tværs af elementet. I den henseende er skalvirkningen altså analog til pladevirkningen i plane elementer.

Dette kapitel omhandler *skivevirkning* i krumme elementer. Det drejer sig altså om krumme skivers evne til at optage kræfter, der angriber i de krumme flader, idet skiverne antages at være helt bøjningsslappe. Ligesom i gennemgangen af plane skiver skal både opbygningen af skivekonstruktioner i stabil ligevægt samt bestemmelse af snitkræfter og spændinger omtales.

Stringermodellen for krumme skiver

I kapitlet »Spændingsfordeling i plane skiver« er det vist, hvorledes man ved hjælp af stringermetoden er i stand til hurtigt at bestemme en statisk tilladelig spændingsfordeling.

Det skal demonstreres i det følgende, at stringermodellen også kan benyttes som et hjælpemiddel ved afgørelsen af, hvilke ydre kræfter en given krum skive med givne understøtningsbetingelser kan optage, og hvilke regler der gælder for opbygningen af skivekonstruktioner i stabil ligevægt, når en eller flere af skiverne er krumme.

Også for krumme skivers vedkommende kan stringermodellen naturligvis benyttes til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger.

Som ved de plane skiver sker en opdeling af de krumme skiver ved indlæggelse af et net bestående af firkantede masker.

Cylinderflader og kegleflader

For at lette forståelsen af krumme skivers virkemåde gennemgås i dette afsnit nogle relativt simple krumme skiver, nemlig cylinderflader og kegleflader, der som vægskiver forbinder to vandrette, plane skiver, der kan opfattes som dækskiver.

En cylinderflade er en flade, der består af retlinede, parallelle frembringere, som følger en vilkårligt formet ledekurve. Cylinderfladens spor i den øverste og i den nederste dækskive er derfor kongruente.

En kegleflade er en flade, der består af retlinede frembringere, som skræner hinanden i ét punkt, toppunktet, og som følger en vilkårligt formet ledekurve. Topunktet antages at ligge over den øverste eller under den nederste dækskive. Keglefladens spor i den øverste og nederste dækskive er derfor ensdannede.

Eksempel 19. Den »knækkede« vægskive

Først betragtes en meget speciel cylinderflade med lodrette frembringere, nemlig en »knækket«, plan vægskive.

Figur 64 viser en sådan »knækket« vægskive understøttet i to punkter, *A* og *B*. Vægskiven understøtter den øverste dækskive, og det skal nu undersøges, for hvilke kræfter i den øverste dækskives plan konstruktionen er i ligevægt. Da lasten angriber vandret, må de lodrette komponenter af reaktionerne i *A* og *B* være lige store og modsat rettede. De benævnes *R* og tænkes ensformigt fordelt overført til vægskiverne via lodrette stringere *AA'* og *BB'*.

Der tænkes lagt et lodret snit i knækkelinien *CC'*. Snitkræfterne på vægfladerne må ligge i begge vægfladers planer, og kan derfor kun være lodrette forskydningskræfter. Ved opstilling af ligevægtsbetingelser ses, at størrelsen af disse forskydningskræfter er *R*. Hvis man tænkte sig en stringer placeret i linien *CC'*, ville stringerkraften i den være nul overalt.

Betegnes de forskydningskræfter, hvormed dækskiverne påvirker de to vægflader, med *V₁* og *V₂*, er en nødvendig betingelse for momentligevægt, at

$$V_1 \cdot h = R \cdot b_1 \wedge V_2 \cdot h = R \cdot b_2 \Leftrightarrow V_1 = \frac{R}{h} \cdot b_1 \wedge V_2 = \frac{R}{h} \cdot b_2$$

Det vil sige, at de forskydningskræfter, hvormed dækskiverne påvirker de to vægflader, er proportionale med vægfladernes bredde, *b₁* og *b₂*.

En kraft *P*, i dækskivens plan, som skal optages af den knækkede vægskive, skal altså kunne opløses i to kræfter, *V₁* og *V₂*, i vægfladernes spor i dækskiven. Dette medfører, at kraften *P* må gå gennem skæringspunktet for de to spor.

Da *V₁* og *V₂* er proportionale med delfladernes bredde, ses det videre, at vægskivens knækkede spor i dækskiven kan opfattes som en kraftpolygon for forskydningskræfterne *V₁* og *V₂*. Det følger heraf, at retningen af resultanten *P* må være parallel med liniestykket *AB* mellem de knækkede spors endepunkter, og at størrelsen er *P = Rb/h*.

Det vil sige, at en knækket vægskive, som er understøttet i to punkter *A* og *B*, kan optage kræfter, som har retningen *AB* eller *BA*, og som går gennem vægskivens knækkpunkt.

Hvis forskydningskraften pr længdeenhed langs væggens spor i dækket regnes konstant lig *v*, fås af ovenstående udtryk

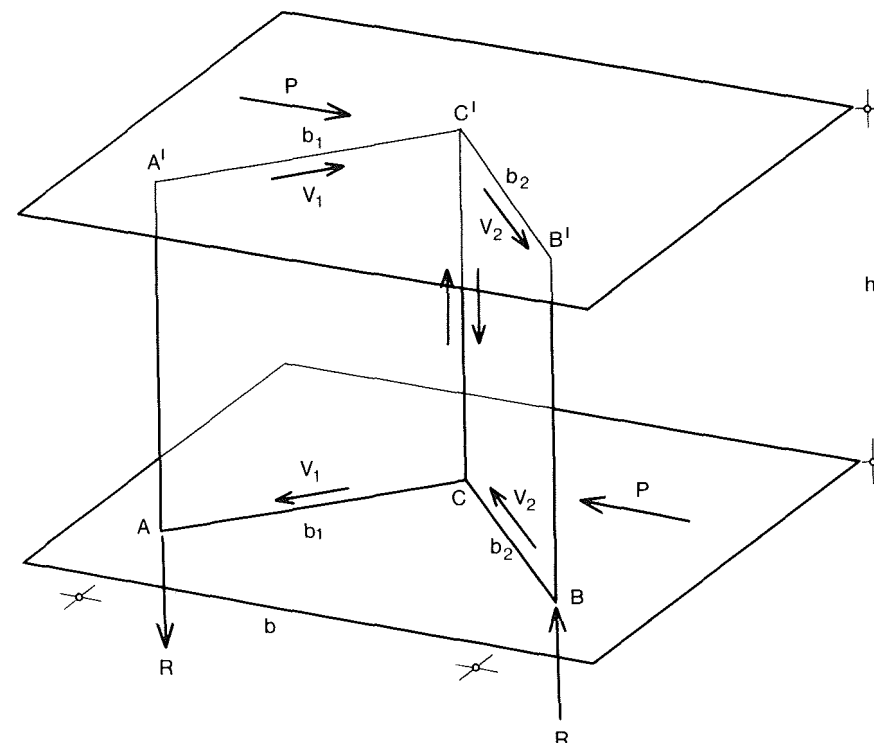
$$v = \frac{R}{h} \wedge P = v \cdot b$$

Eksempel 20.

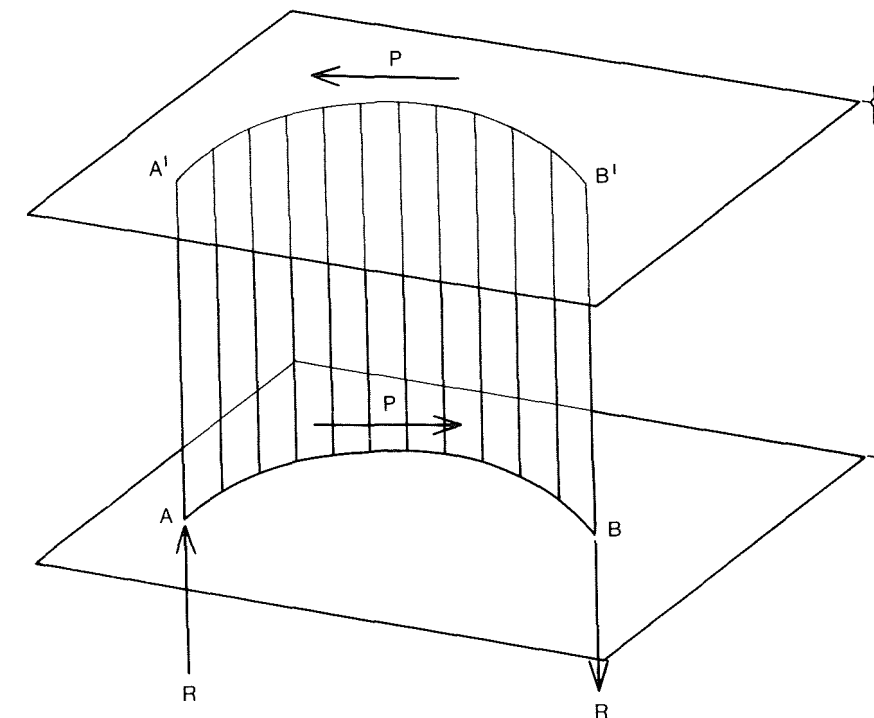
»Stående« cylinderflade, vandret last

Figur 65 viser en vandret belastet væg af form som en kontinuerligt krum cylinderflade med lodrette frembringere, der står mellem to vandrette dækskiver og er understøttet i punkterne *A* og *B*.

Den krumme skive opfattes som sammensat af en række smalle, plane vægflader, hver begrænset af to lodrette frembringere og af de to dæk. Som før ses, at der i frembringersnittene kun kan optræde lodrette forskydningskræfter, og at disse er lig understøtningsreaktionen *R*. Som før ses ligeledes, at de forskydningskræfter, hvormed dækskiverne påvirker skiveudsnittene, er proportionale med skiveudsnittenes bredde. Det vil sige, at forskydningskraften pr længdeenhed langs væggens spor i dækket er konstant lig *v = R/h*. Igen kan væggens spor i dækplanet opfattes som en kraftpolygon for forskydningskræfterne mellem dækskive og vægskive. Beliggenheden af kraftpolygonens resultant kan findes ved hjælp af *Bredt's formel*, se [2].



Figur 64. Simpelt understøttet, »knækket« vægskive mellem to dækskiver. Vægskiven belastes gennem det øverste dæk med den vandrette kraft *P*, hvorved understøtningsreaktionerne *R* i *A* og *B* bliver lige store og modsat rettede. Forskydningskræfterne *V₁* og *V₂* mellem vægfladerne og det øverste dæk er lig med vægfladernes bredder *b₁* og *b₂*, multipliceret med kraftintensiteten *R/h*. Heraf følger, at disse kræfters resultant – som går gennem *C'* – er parallel med *A'B'* og lig med længden *A'B'* multipliceret med *R/h*.



Figur 65. Stående cylinderflade mellem to dækskiver, påvirket af en vandret enkeltkraft og understøttet i de to punkter *A* og *B*. I alle lodrette snit findes alene en forskydningskraft, der er lig understøtningsreaktionen *R*. De kræfter *V₁*, *V₂*, ..., *V_n*, hvormed den øverste dækskive påvirker hver af de *n* lameller, er lig med bredderne af de pågældende lameller, multipliceret med *R/h*. Cylinderfladens spor i dækskiven kan opfattes som en kraftpolygon for disse kræfter, hvilket viser, at resultanten *P* har retningen *AB* og størrelsen *AB · R/h*. Beliggenheden af *P* findes af *Bredt's formel*, se figur 66.

Bredt's formel siger, at resultanten for en tangentielt virkende last med konstant intensitet *v* langs en plan kurve ligger i afstanden *e = 2 F₀/b* fra den korde, der forbinder kurvens endepunkter. *F₀* er arealet af det område, der omslutes af kurven og korden, mens *b* er kordens længde, se figur 66. Det kan endvidere vises, at resultantens størrelse er *V = b · v*.

Dersom der er tale om en »knækket«, plan vægskive eller en parabolisk cy-

linderflade, kan resultantens beliggenhed direkte angives, se figur 67 og 68.

Det ses således, at en cylindrisk vægskive ved vandret last virker som støttelinie for øverste dækskive i linien bestemt efter *Bredt's formel*.

Under uheldige omstændigheder kan det ske, at to krumme vægge resulterer i samme støttelinie. I et sådant tilfælde er tre vægge ikke tilstrækkelige som understøtning for et dæk.

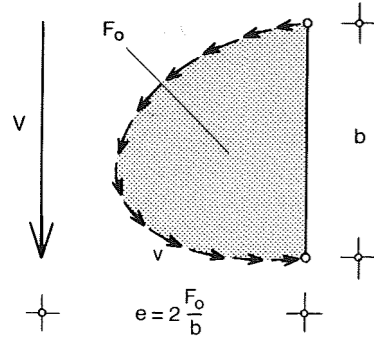
Lige så utilstrækkeligt er det, dersom

støttelinierne fra tre krumme vægge går gennem samme punkt *G*, se figur 69. I et sådant tilfælde vil kun kræfter, hvis angrebslinier går gennem punkt *G*, kunne optages af væggene.

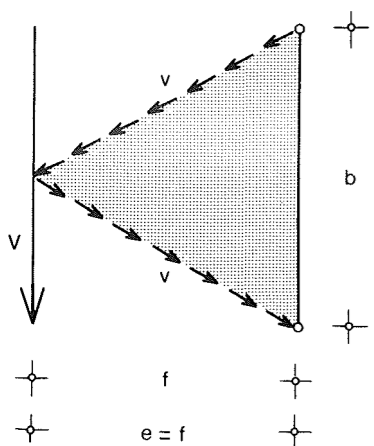
Eksempel 21.

»Stående« cylinderflade, lodret last

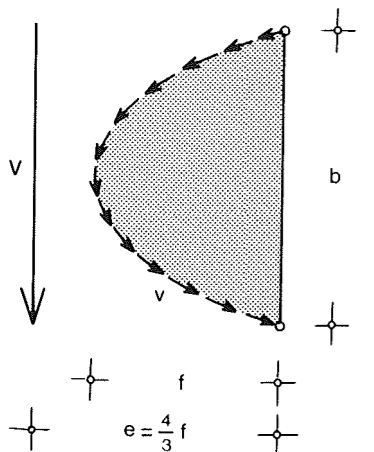
Lodrette kræfter, der skal optages af en krum vægskive, skal til forskel fra vandrette kræfter angribe i den krumme



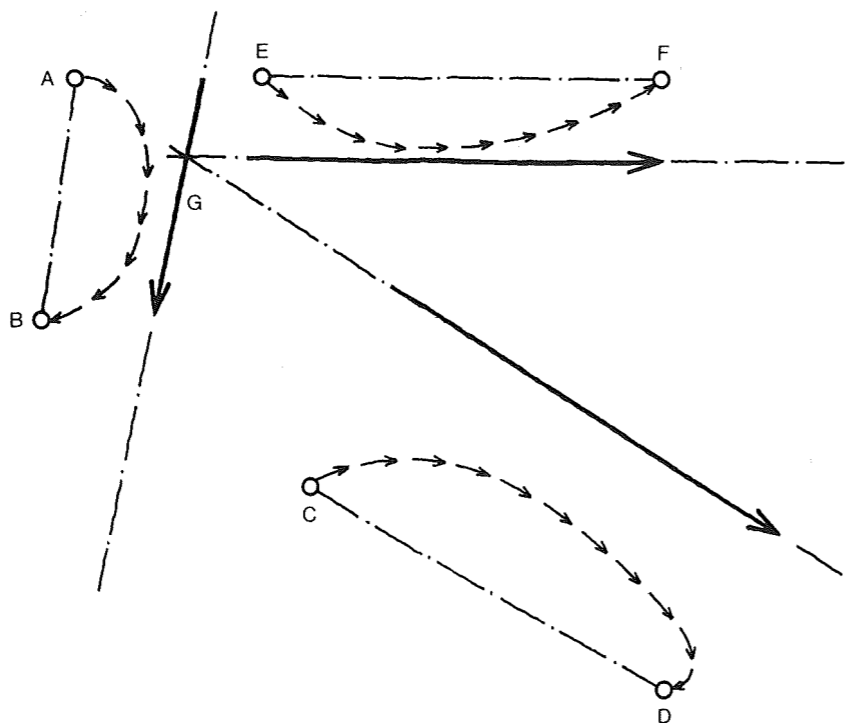
Figur 66. Bredt's formel siger, at kraftpolygonens resultant V ligger i afstanden $e = 2F_0/b$ fra den korde, der forbinder skivens understøtningspunkter. F_0 er arealet af det område, der omslutes af kraftpolygonen, mens b er kordens længde.



Figur 67. For en knækket vægskives spor i et dæksplan giver Bredt's formel umiddelbart, at kraftpolygonens resultant går gennem knæpunktet.



Figur 68. For en krum vægskive, hvis spor i dækskiven har form som en parabel, giver Bredt's formel umiddelbart, at kraftpolygonens resultant ligger i afstanden $4f/3$ fra den korde, der forbinder skivens understøtningspunkter.



Figur 69. Tre støttelinier er det nødvendige og tilstrækkelige antal til at holde en skive fast. Det er dog en forudsætning, at disse tre støttelinier ikke går gennem samme punkt. Figuren

viser et eksempel, hvor tre krumme vægskivers spor i en dækskive har støttelinier (beliggenheden bestemt efter Bredt's formel), der netop går gennem samme punkt.

skives spor og ikke i støttelinien, da den plane dækskive, som skive betragtes, ikke kan transportere en lodret kraft hen til væggen.

Endvidere skal dækskiverne være i stabil ligevægt (ubevægelige), således at de kan levere de vandrette forskydningskræfter til væggene, som er nødvendige for, at de lodrette kræfter kan flyttes hen til understøtningerne. I forbindelse med denne stabilisering af det øverste dæk kan den krumme vægskive opfattes som en støttelinie, hvis placering bestemmes efter Bredt's formel.

Figur 70 viser en væg, svarende til væggen i eksempel 20, men belastet med en lodret enkeltkraft P . Som i de foregående eksempler optræder der i frembringernesnittene kun lodrette forskydningskræfter, som i størrelse er lig med reaktionerne R_A , hhv R_B . Endvidere påvirkes vægfladerne af forskydningskræfter langs deres spor i dækkene. Disse kræfter har på strækningen $C'A'$ intensiteten $v_1 = R_A/h$, og på strækningen $C'B'$ intensiteten $v_2 = R_B/h$. Reaktionernes størrelser kendes foreløbig ikke; man ved kun, at deres sum er lig P . Reaktionerne og lasten tænkes overført til forskydningsfelterne (vægfladerne) gennem tre stringere AA' , BB' og CC' .

Som nævnt ovenfor skal dækskiverne være i stabil ligevægt. Det vil for den øverste dækskives vedkommende sige, at den foruden af væg $A'B'$ må under-

støttes af to andre vægge, $D'E'$ og $F'G'$, hvis støttelinier hverken begge er parallelle med eller skærer hinanden på støttelinien fra væg $A'B'$.

Figur 71 viser det øverste dæk, påvirket af forskydningskræfterne v_1 og v_2 fra den krumme væg, samt af forskydningskræfterne V_3 og V_4 fra støttelinierne fra væggene $D'E'$ og $F'G'$.

Resultanterne af forskydningskræfterne v_1 og v_2 , som kan bestemmes ved hjælp af Bredt's formel, benævnes V_1 og V_2 . Deres skæringspunkt ligger på støttelinien fra væg $A'B'$, jf [2], og da denne støttelinie ikke går gennem skæringspunktet H for V_3 og V_4 , kan V_1 og V_2 ikke begge gå gennem H .

En af ligevægtsbetingelserne for dækket giver

$$\text{Moment om } H: \\ V_1 \cdot a_1 = V_2 \cdot a_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

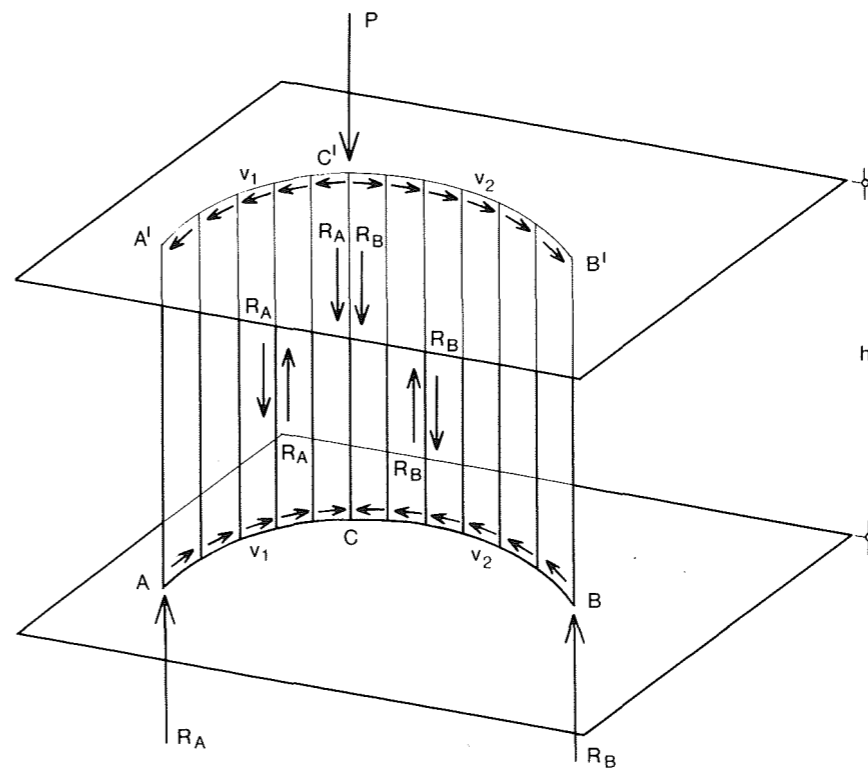
Hvis længden af korderne $A'C'$ og $C'B'$ betegnes b_1 og b_2 , haves endvidere:

$$V_1 = v_1 \cdot b_1 = R_A \cdot \frac{b_1}{h} \wedge$$

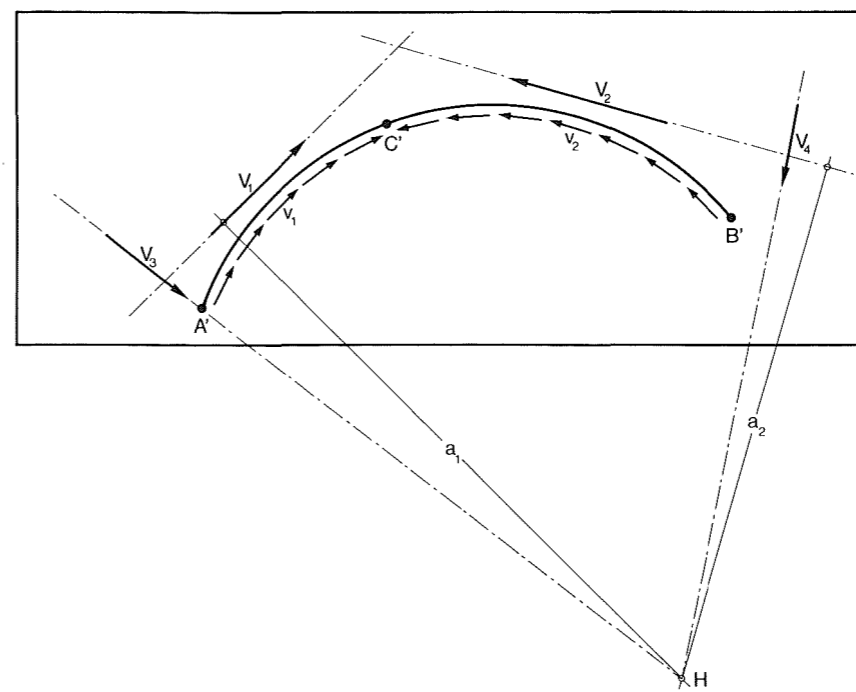
$$V_2 = v_2 \cdot b_2 = R_B \cdot \frac{b_2}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_A \cdot b_1}{R_B \cdot b_2} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{b_2 \cdot a_2}{b_1 \cdot a_1}$$

Da man endelig har $R_A + R_B = P$, kan R_A og R_B nu bestemmes; derefter kan



Figur 70. Stående cylinderflade mellem to dækskiver, påvirket af en lodret enkeltkraft og understøttet i de to punkter A og B . De lodrette reaktioner R_A og R_B kan ikke umiddelbart bestemmes. Men forskydningskræfterne i alle lodrette snit er ens i hvert af områderne $ACC'A'$ og $CBB'C'$. De forskydningskræfter pr længdeenhed v , som øverste dækskive påvirker væggen med, bliver derfor konstante på hver delstrækning med intensiteterne $v_1 = R_A/h$ og $v_2 = R_B/h$.



Figur 71. Plan af øverste dækskive, jf figur 70. Resultanterne af v_1 og v_2 er V_1 og V_2 , som kan bestemmes ved hjælp af Bredt's formel. De skal holde ligevægt med reaktionerne V_3 og V_4 fra de to andre støttelinier, som er nødvendige for at sikre dækskivens stabilitet. Ved at tage moment om skæringspunktet H kan forholdet V_1/V_2 bestemmes.

V_1 og V_2 bekvemt bestemmes, og endelig kan V_3 og V_4 bestemmes ved projektionsligninger.

En anden mulig fremgangsmåde til bestemmelse af kraftforløbet i den beskrevne konstruktion bygger på superpositionsprincippet. I første omgang tænker man sig den lodrette kraft P optaget af reaktionen R_A alene, dvs

$$v_1 = P/h, \quad V_1 = P b_1/h \quad \text{og} \quad V_2 = 0$$

I anden omgang optages den vandrette kraft V_1 af konstruktionen som beskrevet i eksempel 20. Dette medfører

en konstant forskydningskraft pr længdeenhed i hele den krumme vægskive

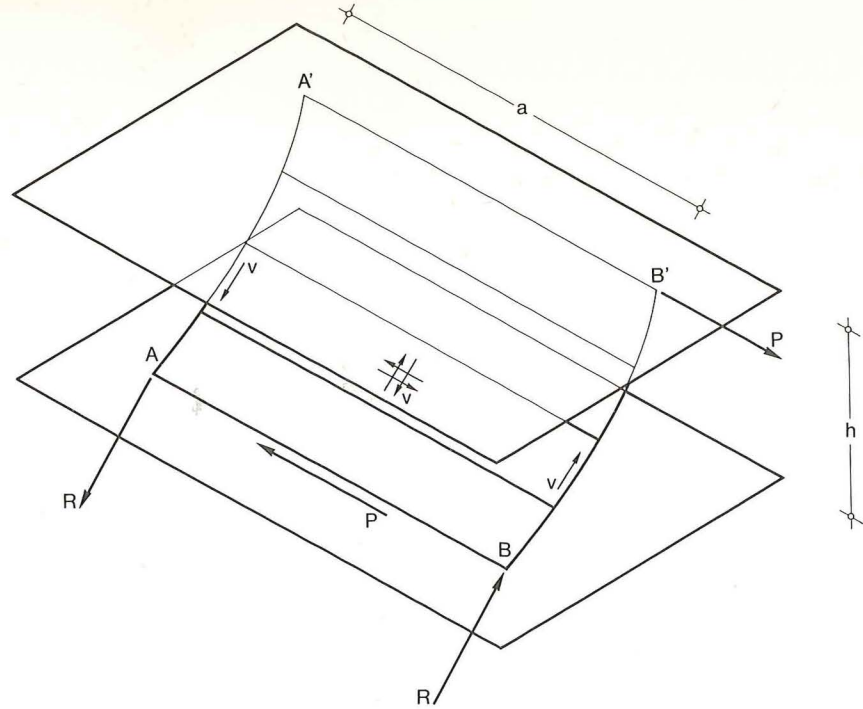
$$|v_1| = |v_2|$$

som adderes til den i første omgang fundne v_1 .

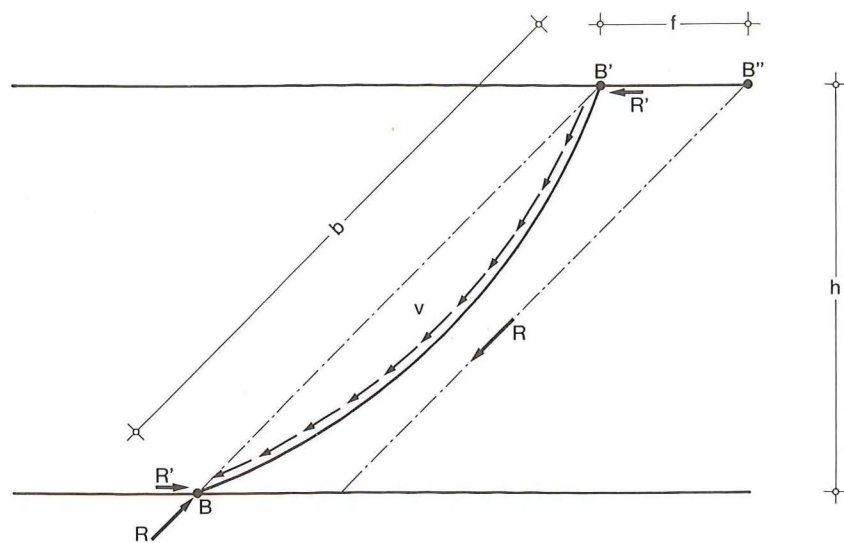
Er cylindervæggen ikke lodret, men skråtstillet, har væggen de samme afstivende egenskaber. Lodrette kræfter i vægskivens spor kan altid opløses i en komponent i dækskivens plan og en komponent langs en frembringer. Vand-

rette kræfter virkende i en støttelinie, bestemt efter Bredt's formel, kan føres ned ved hjælp af et moment fra understøtningsreaktionerne, som har samme retning som frembringerne. Det er naturligvis en forudsætning, at begge dækskiver er i stabil ligevægt, altså enten statisk bestemt eller statisk ubestemt understøttede.

Er cylindervæggen frembringerer derimod parallelle med dækskiverne, må den krumme skive afstives som vist i de følgende eksempler for at kunne overføre kræfter mellem dækskiverne.



Figur 72. Liggende cylinderflade mellem to dæskiver, påvirket af en vandret enkeltkraft og understøttet i de to punkter A og B. I alle vandrette snit findes forskydningskræfter af størrelsen P. Hver lamel må da påvirkes af kræfter i sine endeflader, som er lig med endefladens længde multipliceret med P/a . Stringer AA' og BB' påvirkes af modsat rettede forskydningskræfter pr længdeenhed med den konstante intensitet $v = P/a$.



Figur 73. Stringer BB' , jf figur 72. Resultanten af forskydningskræfterne v er $v \cdot b = R$, placeret iflg Bredt's formel. Stringerens totale ligevægt kræver da, at den yderligere påvirkes af vandrette reaktioner $R' = v \cdot f$ fra dækkene. Ligevægtsbetingelser for udsnit af stringeren viser, at den er momentpåvirket, idet kræfterne søger at krumme den yderligere. Den må derfor afstives af en bjælke eller skive i papirets plan.

Eksempel 22.
»Liggende« cylinderflade, vandret last

Figur 72 viser en cylindervæg med vandrette frembringere, der belastes vandret langs sit spor i øverste dækskive. Væggen opdeles i plane, rektangulære forskydningsfelter, begrænset af frembringere og af vægskivens krumme kanter.

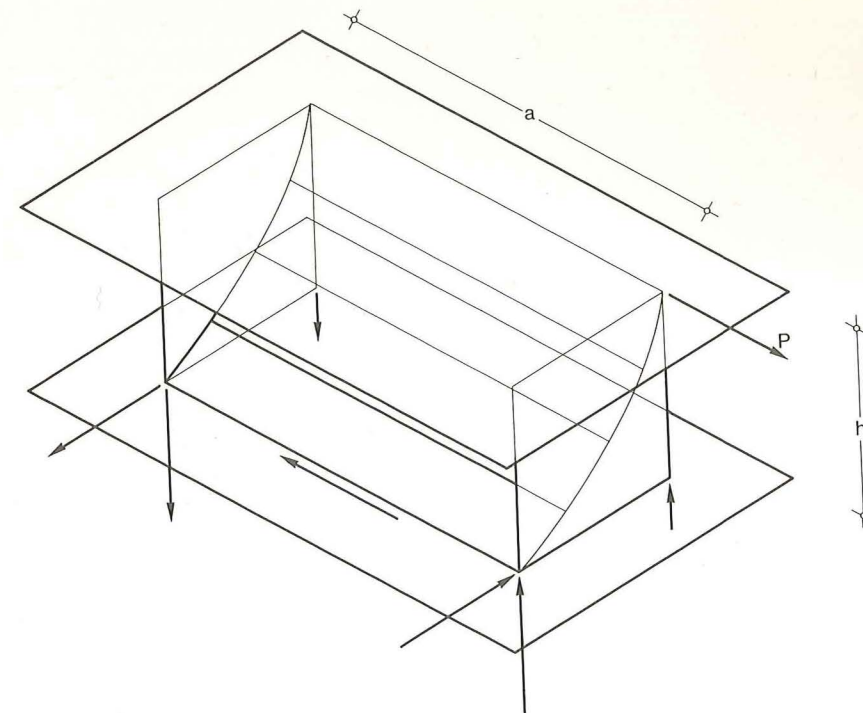
Som i de øvrige eksempler ses, at der i frembringersnittene kun er forskyd-

ningskræfter af størrelsen P , og at eventuelle stringere i disse snit er upåvirkede. Ligevægtsbetingelserne for forskydningsfelterne medfører da, at der mellem de krumme stringere AA' og BB' og forskydningsfelterne må opstå forskydningskræfter pr længdeenhed af størrelsen $v = P/a$.

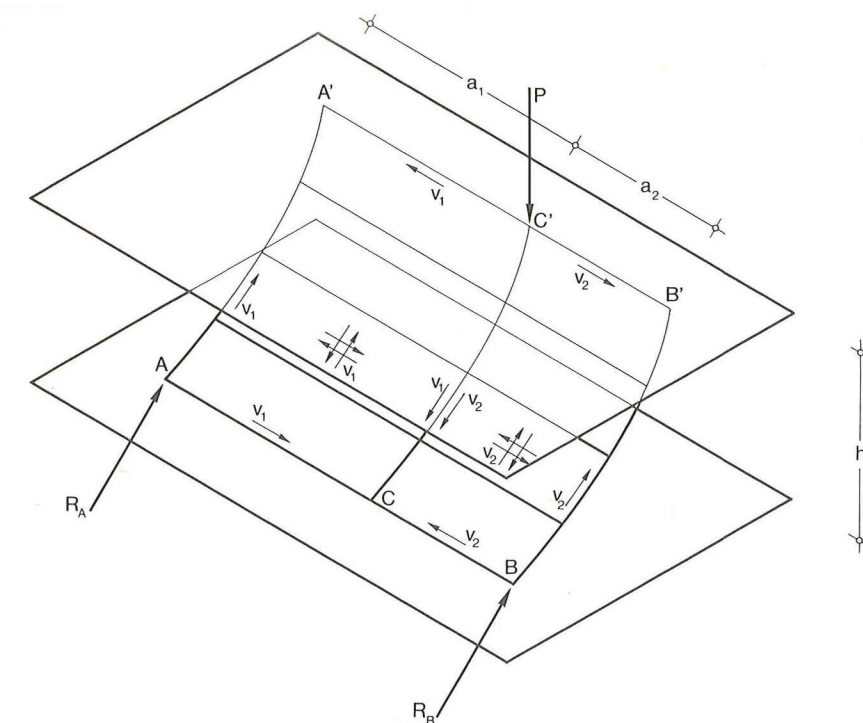
Figur 73 viser en af disse stringere, nemlig BB' , og de forskydningskræfter v , som forskydningsfelterne påvirker den med, samt reaktionen R . Størrelsen af forskydningskræfternes resultant bli-

ver $v \cdot b = R$, og beliggenheden kan bestemmes af Bredt's formel. Det ses da, at stringeren kun kan være i ligevægt, hvis der påføres vandrette reaktioner R' i øverste og nederste dæk.

Ved punkterne A og A' (se figur 72) virker der lige så store, men modsat rettede reaktioner R' . Det øverste dæk påvirkes således til vridning om en lodret akse. Hvis P angriber langs »støtteplanets« spor i øverste dækskive (punkt B'' på figur 73) i stedet for i den krumme vægskives spor, ophæves dette vridende



Figur 74. Hvis kanternes afstivninger etableres som vægskiver, har man samtidig etableret de manglende støttelinier for det øverste dæk.



Figur 75. Samme konstruktion som i figur 72, men påvirket af en lodret enkeltkraft. Det er nærliggende at antage, at forskydningskræfterne mellem en stringer og de tilstødende forskydningsfelter har konstant intensitet, $v_1 = R_A/b$ til venstre for CC' og $v_2 = R_B/b$ til højre for CC' .

moment netop. Dækket er således i ligevægt, hvis P angriber langs en linie, der går gennem B'' og er parallel med AB .

Imidlertid ses det ved at snitte stringeren over og opstille ligevægtsbetingelser, at stringeren er påvirket til bøjning. Der må derfor placeres en bjælke eller en vægskive langs hver af kanterne AA' og BB' , som kan optage dette moment. Hvis der anbringes vægskiver, som vist på figur 74, har man samtidig etableret de manglende støttelinier for den øverste dækskive, således at den

vandrette kraft nu kan angribe langs en vilkårlig linie i dækskiven.

Eksempel 23.
»Liggende« cylinderflade, lodret last

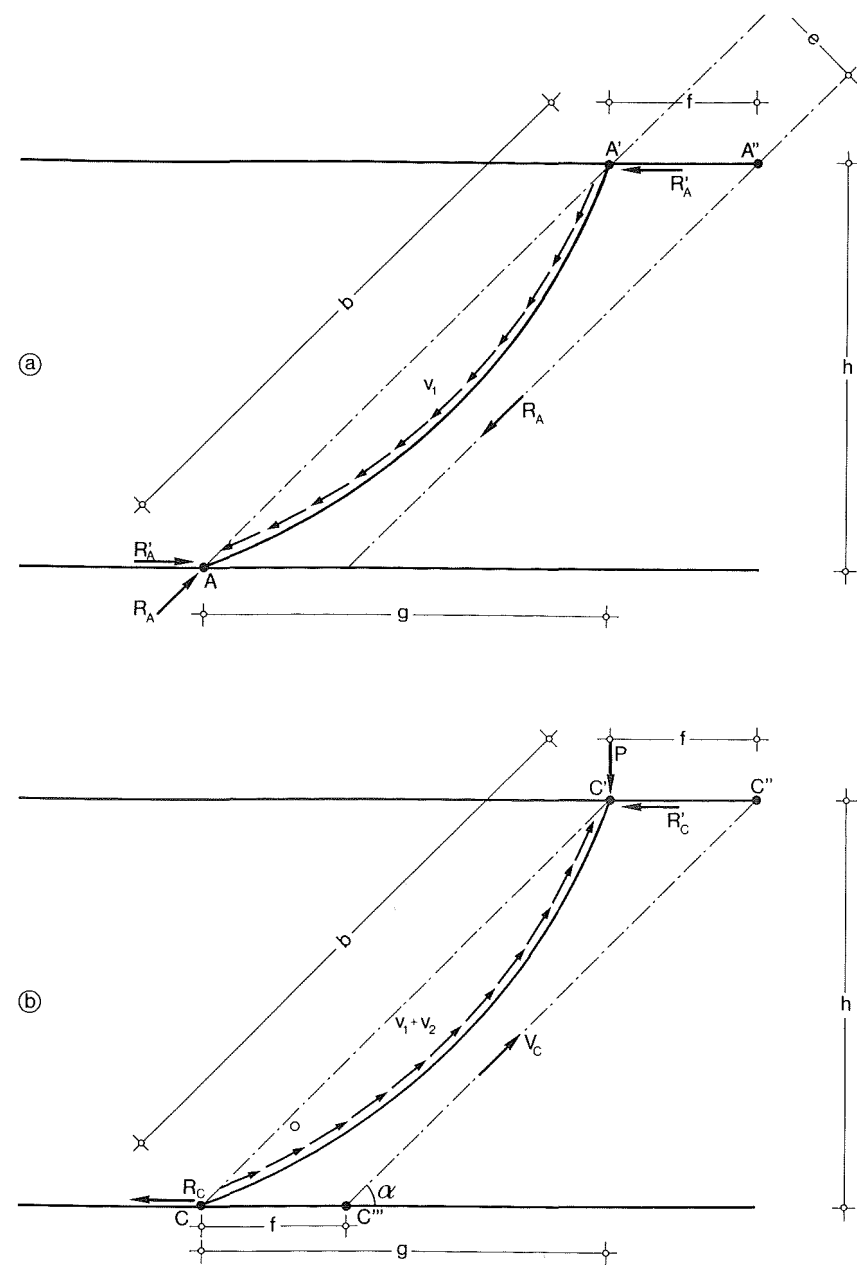
Figur 75 viser en vandret cylindervæg, som belastes med en lodret enkeltkraft P . Der indlægges tre krumme stringere AA' , BB' og CC' , som forudsættes at overføre reaktionerne og den ydre last ensformigt til forskydningsfelterne. De numeriske størrelser af forskydnings-

kræfterne pr længdeenhed i forskydningsfelterne bliver da, idet kordelængden AA' benævnes b

$$\text{i området } ACC'A': v_1 = \frac{R_A}{b}$$

$$\text{i området } CBB'C': v_2 = \frac{R_B}{b}$$

I de vandrette frembringersnit optræder der forskydningskræfter pr længdeenhed, hvis størrelser er v_1 til venstre for og v_2 til højre for CC' .



Figur 76. Stringerne AA' og CC', jf figur 75. Den totale ligevægt for stringer AA' kræver, at stringeren påvirkes af reaktioner $R'_A = v_1 \cdot f$ fra dækkene. Nøjagtigt som i figur 73 påvirkes stringeren til bøjning og må afstives. Ligevægten for stringer CC' kræver ligeledes vandrette reaktioner fra dækkene. Her er $R_C = (v_1 + v_2) \cdot f$, mens $R'_C = P_V - R_C$, hvor P_V er den kraft, der skal til for at dreje den lodrette P hen i retningen C'C. Også stringer CC' er bøjningspåvirket og må afstives.

Figur 76 viser stringerne AA' og CC' og de kræfter, der virker på dem, nemlig forskydningskræfterne v fra forskydningsfelterne, kræfterne P og R_A samt de vandrette reaktioner, som dækkene kan præstere, idet de forudsættes mindst statisk bestemt understøttede i vandret retning.

Resultanten af kræfterne v_1 på stringer AA' er R_A , placeret som vist iflg Bredt's formel. Stringerens ligevægt kræver vandrette reaktioner fra dækkene

$$R'_A = R_A \cdot \frac{e}{h} = v_1 \cdot \frac{b \cdot e}{h} = v_1 \cdot f$$

Analogt fås for stringer BB'

$$R'_B = v_2 \cdot f$$

Resultanten af kræfterne $v_1 + v_2$ på stringer CC' benævnes V_C , og de vandrette reaktioner fra dækkene benævnes R'_C og R_C .

Projektionsligevægt på lodret medfører

$$P = V_C \cdot \sin \alpha = (v_1 + v_2) \cdot b \cdot \frac{h}{b} = (v_1 + v_2) \cdot h$$

hvorefter momentligevægt om punkt C''' medfører

$$R'_C = P \frac{g-f}{h} = P \cdot \frac{g}{h} - (v_1 + v_2) \cdot h \cdot \frac{f}{h} = P \cdot \frac{g}{h} - R'_A - R'_B$$

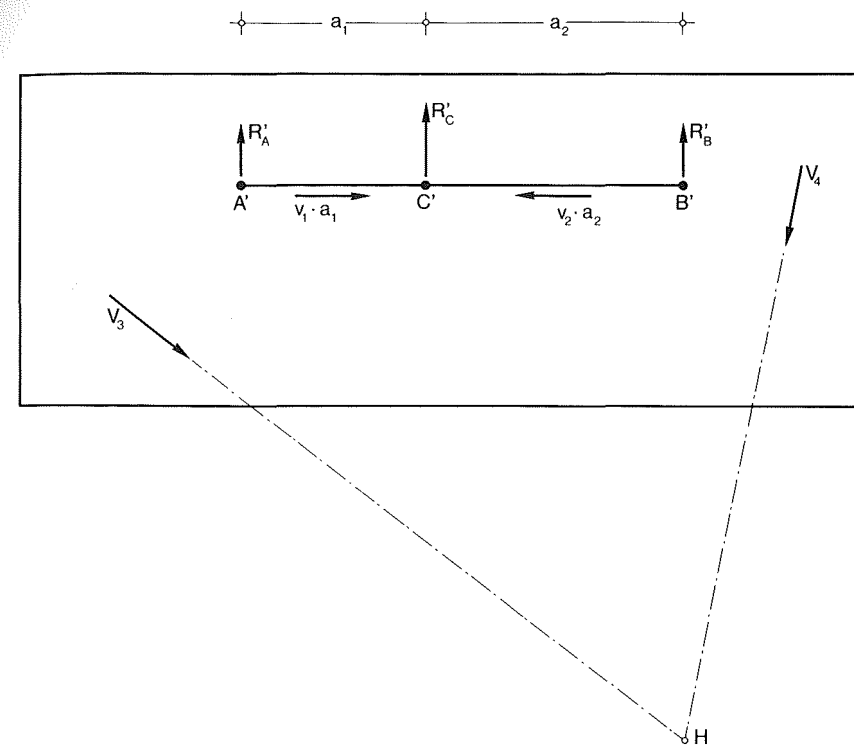
Figur 77 viser øverste dæk, set fra oven, og de vandrette kræfter, det påvirkes af, nemlig aktioner svarende til reaktionerne R'_A , R'_B og R'_C , forskydningskræfter fra cylinderfladens øverste frembringer samt reaktioner V_3 og V_4 fra de to støttelinier, der sammen med cylindervæggen er nødvendige for understøtning af det øverste dæk.

Ved opstilling af dækkets ligevægtsbetingelser, suppleret med det ovenfor udledte udtryk $v_1 + v_2 = P/h$ kan v_1 , v_2 , V_3 og V_4 findes. Derefter lader de øvrige reaktioner etc sig simpelt bestemme.

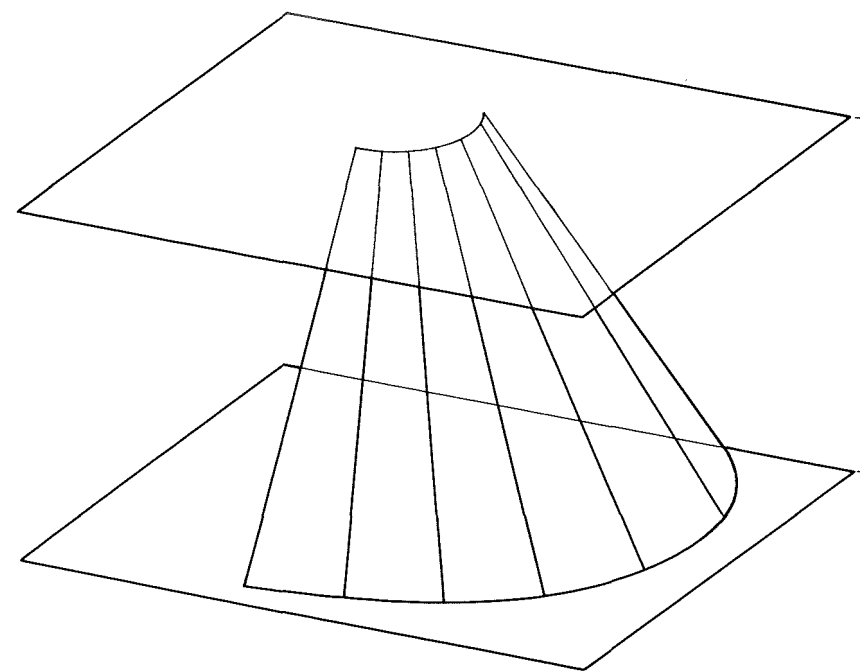
Bemærk, at fordelingen af kraften P på reaktionerne R_A og R_B ikke alene afhænger af afstandene a_1 og a_2 , men også af bl.a. punkt H's beliggenhed.

Ved betragtning af stringerne i figur 76 ses, at de er påvirkede til bøjning. Der må derfor indlægges bjælker eller afskærende skiver gennem disse stringere.

Oftentimes vil den lodrette last på en vægskive ikke være en enkeltkraft, men en fordelt last (kraft pr længdeenhed) med en, eventuelt varierende, intensitet p . Denne last medfører bøjningsmomenter i den krumme væg i hele dens bredde. Lasten kan altså ikke optages ved skivevirkning alene. Momenterne i væggen



Figur 77. Plan af øverste dækskive, jf figur 75. Påvirkningerne R'_A , R'_B og R'_C fra stringerne samt resultanterne $v_1 \cdot a_1$ og $v_2 \cdot a_2$ fra forskydningsfelterne skal holde ligevægt med reaktionerne V_3 og V_4 fra dækskivens øvrige støttelinier. Ved at tage moment om H, og samtidig udnytte de kendte relationer mellem kræfterne, kan man bestemme snitkraftfordelingen entydigt.



Figur 78. Vægskive af form som en kegleflade mellem to dækskiver. Fladen opdeles i trapezformede felter, der er så smalle, at de kan regnes plane. Herefter kan den behandles på næsten tilsvarende måde som den stående cylinderflade i figur 65 og 70.

kan bestemmes ved at betragte vægudsniit med konstant lastintensitet p og begrænset af planer vinkelret på frembringerne. Kræfter påføres som på figur 76 nederst, idet P erstattes med lastintensiteten gange udsnittets bredde. Reaktionerne R_A og R_B , samt momenterne i eventuelle kantbjælker AA' og BB', kan bestemmes som beskrevet i første del af dette eksempel, idet P er resultanten af p .

Eksempel 24.
»Stående« kegleflade

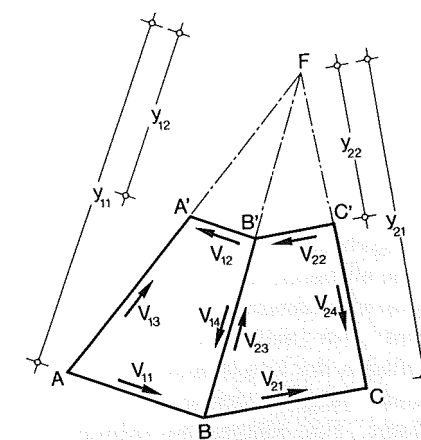
Figur 78 viser en skive, der har form som en kegleflade, som begrænses af to pa-

rallele skiver (dækskiverne) og to frembringer. Skiven kan altså karakteriseres ved, at alle frembringer spænder fra den ene dækskive til den anden.

Keglefladen opdeles som vist i trapezformede forskydningsfelter, der er så smalle, at de kan forudsættes plane.

To naboforskydningsfelter betragtes, se figur 79. Det forudsættes, at stringeren mellem dem, BB', ikke påvirkes af ydre kræfter som fx reaktioner eller laster på tværs af dækskiverne. Forskydningsfelterne påvirkes af de viste forskydningskræfter V .

Som i eksempel 18 varierer forskydningskræfterne pr længdeenhed langs frembringerne, mens de for hvert for-



Figur 79. To naboforskydningsfelter fra vægskiven i figur 78. På grundlag af reglerne for spændingsfordeling i trapezformede forskydningsfelter kan det vises, at forskydningskræfterne pr længdeenhed har strækningsvis konstant intensitet i samlingerne mellem væg og dæk. Herefter kan man gå frem som beskrevet i forbindelse med figur 65 eller 71.

skydningsfelt er konstante langs feltets spor i dækskiverne. Da intensiteten langs alle frembringere er omvendt proportional med kvadratet på afstanden fra F , og da forholdet mellem afstandene fra F til hver enkelt frembringers to endepunkter er konstant ($y_{11}/y_{12} = y_{21}/y_{22} = \dots$), er forskydningskræfterne fordelt på samme måde langs alle frembringere. Da endvidere $V_{14} = V_{23}$, må forskydningskræfterne pr længdeenhed være ens i sammenhørende punkter på hver side af BB' . Heraf følger, at $v_{12} = v_{22}$ osv, altså at forskydningskraften pr længdeenhed langs væggenes spor i et dæk er konstant på strækningerne mellem ydre kræfter på tværs af dækskiverne.

Hvor en ydre kraft angriber på tværs af dækskiverne, tænkes der langs vedkommende frembringer indlagt en stringer, som overfører kraften til forskydningsfeltet og fordeler den således, at $v = k|y|^2$.

Herefter kan den stående kegleflade behandles helt analogt til den stående eller den skrå cylinderflade.

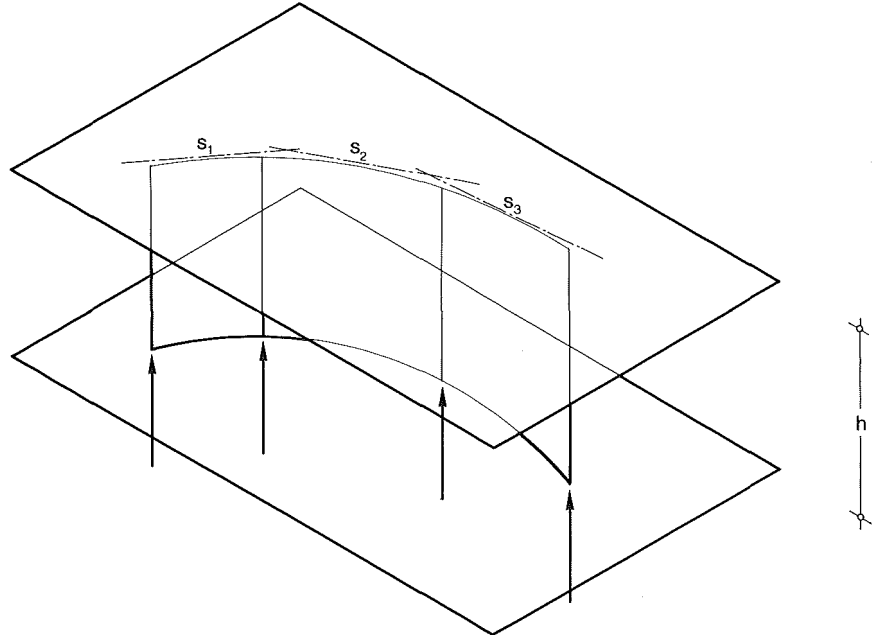
Det vil sige, at en væg, formet som en kegleflade og understøttet i to punkter A og B af den nederste dækskive, virker som støttelinie for den øverste dækskive i en linie, bestemt efter Bredt's formel anvendt på strækningen $A'B'$ af væggenes spor i øverste dæk, hvor A' og B' ligger på frembringerne gennem A og B .

Cylinder- og kegleflader som stabiliserende vægge

Tidligere i denne anvisning er opbygningen af skivekonstruktioner i stabil ligevægt, bestående af plane skiver, gennemgået. Eksemplerne 20-24 viser, at plane skiver kan erstattes af skiver, der har form som cylinderflader eller som kegleflader, og som er begrænsede på den ene led af rette frembringere, på den anden led af krumme linier (ledeskurver) i parallelle, såkaldte afskærende, planer. Hvis de rette kanter påvirkes på tværs, må de krumme linier, der udgår fra angrebepunkterne og er parallelle med de afskærende planer, afstives ved hjælp af afskærende skiver eller krumme bjælker. For »stående« cylinder- og kegleflader, der kun belastes i dækkens niveauer, udgøres denne afstivning af dækkene. For »liggende« cylinderflader må der derimod etableres en særlig afstivning som vist i eksempel 22 og 23.

Bemærk, at de omtalte skivers fire hjørner altid ligger i samme plan, da de rette frembringere enten udgår fra samme punkt eller er parallelle.

Virksomheden overfor vandret last af en sådan krum vægskive svarer til virk-



Figur 80. En vægskive af form som en stående cylinder- eller kegleflade kan alene fastholde et dæk, så det er i stabil ligevægt, hvis forskel-

lige betingelser er opfyldt. En af betingelserne er, at vægskiven skal være understøttet i mindst fire punkter.

ningen af en plan væg, placeret i den krumme vægskives støtteplan, som bestemmes på følgende måde. Ved anvendelse af Bredt's formel på ledekurverne bestemmes to rette linier, som ligger i hvert sit af de afskærende planer. Disse rette linier bestemmer tilsammen ét plan, som er den krumme vægskives støtteplan.

Det er her forudsat, at skiven er understøttet i to hosliggende hjørner, som er fastholdt i rummet, mens lasten angriber på den modstående kant. Hvis skiven i stedet er understøttet i to indre punkter A og B på den ene krumme kant, skal Bredt's formel kun anvendes på strækningen AB og den tilsvarende strækning $A'B'$ på den anden krumme kant.

Er skiven understøttet i fire punkter af den krumme kant, som vist på figur 80, har skiven tre støtteplaner, svarende til støttelinierne s_1 , s_2 og s_3 . Den krumme vægskive alene kan derfor understøtte den øverste dækskive, forudsat at støttelinierne ikke er parallelle eller skærer hinanden i samme punkt. Hvis hele den krumme kant er understøttet, kan den krumme vægskive ligeledes fastholde den øverste dækskive. Konstruktionen i figur 14 er et specielt eksempel herpå, hvor cylindervæggens ledekurve består af tre retlinede stykker.

Cylinderflader og kegleflader benævnes enkeltkrumme flader. Hver af dem indeholder et system af rette frembringere, som to og to ligger i samme plan, dvs aldrig ligger vinkelret i forhold til hinanden.

Dobbeltkrumme skiver

De principper, der gennemgås i dette afsnit, har relevans for alle typer af dobbeltkrumme flader. Af praktiske grunde benyttes dog kun de såkaldte dobbeltkrumme keglesnitflader i det følgende.

Alle keglesnitfladerne kan indlægges i et rumligt, retvinklet xyz -koordinatsystem på en sådan måde, at de kan beskrives enten ved

$$\{(x,y,z) \mid \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = K\}$$

eller ved

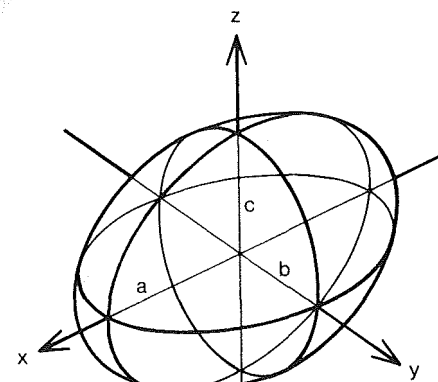
$$\{(x,y,z) \mid \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 2Iz\}$$

hvor λ_1 , λ_2 , λ_3 , K og I er konstanter.

De enkeltkrumme keglesnitflader er visse cylinder- og kegleflader. Som skiver har de ingen særlige fortrin i forhold til enkeltkrumme flader i almindelighed; derfor er de ikke beskrevet nærmere.

De dobbeltkrumme keglesnitflader er ellipsoiden, hyperboloiden med ét net, hyperboloiden med to net, paraboloiden og den hyperbolske paraboloid. Disse flader har nogle geometriske egenskaber, som gør, at de under visse betingelser kan anvendes som skiver.

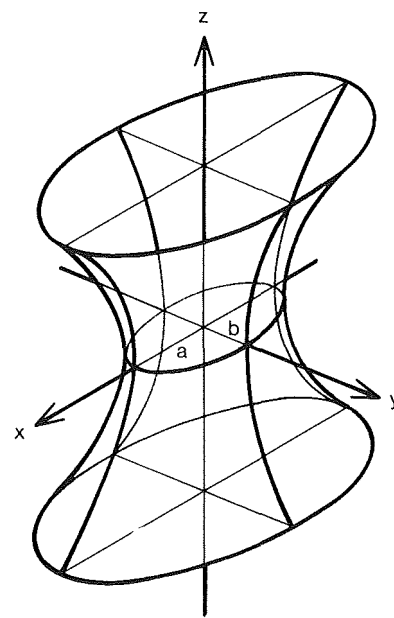
I figur 81-85 er vist, hvorledes forskellige valg af konstanter i de ovenstående udtryk giver forskellige typer dobbeltkrumme keglesnitflader. Endvidere er disse fladers vigtigste geometriske egenskaber beskrevet. For en mere udførlig gennemgang henvises til geometrien, se fx [12].



Figur 81. Keglesnitfladen

$$\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

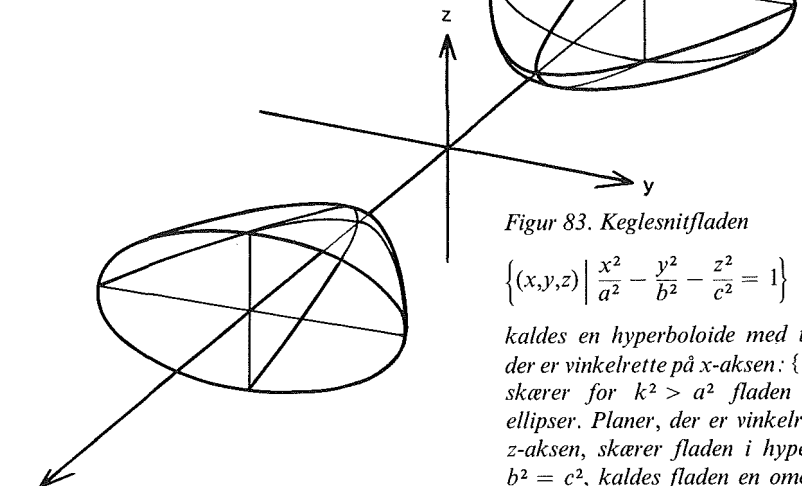
kaldes en ellipsoide. Planer, der er vinkelrette på en af akserne, fx planen $\{(x,y,z) \mid x = k\}$ skærer for $k^2 < c^2$ ellipsoiden i lignedannede ellipser. Dersom $a^2 = b^2$, kaldes fladen en omdrejningsellipsoide, og dersom $a^2 = b^2 = c^2$, er fladen en kugleflade. Ellipsoiden indeholder ikke rette linier.



Figur 82. Keglesnitfladen

$$\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

kaldes en hyperboloid med ét net. Planer, der er vinkelrette på z -aksen, skærer fladen i lignedannede ellipser. Planer, der er vinkelrette på x - eller y -aksen, fx planen $\{(x,y,z) \mid x = k\}$ skærer for $k^2 \neq a^2$ fladen i hyperbler. For $k^2 = a^2$ udarter hyperblen til to rette linier. Dersom $a^2 = b^2$, kaldes fladen en omdrejningshyperboloid med ét net. Gennem ethvert punkt af fladen går to rette linier; hyperboloiden med ét net indeholder således to systemer af rette linier. To linier af samme system ligger vinkelret, mens to linier af modsat system ligger i samme plan.



Figur 83. Keglesnitfladen

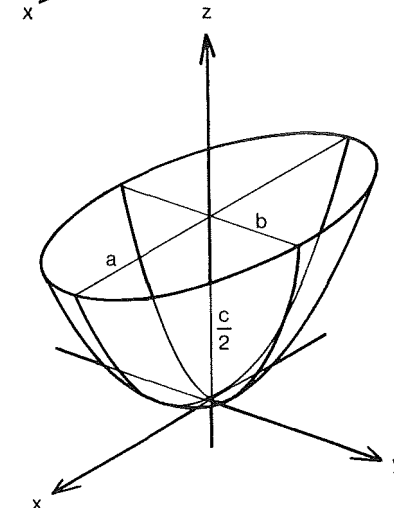
$$\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$$

kaldes en hyperboloid med to net. Planer, der er vinkelrette på x -aksen: $\{(x,y,z) \mid x = k\}$, skærer for $k^2 > a^2$ fladen i lignedannede ellipser. Planer, der er vinkelrette på y - eller z -aksen, skærer fladen i hyperbler. Dersom $b^2 = c^2$, kaldes fladen en omdrejningshyperboloid med to net. Fladen indeholder ikke rette linier.

Figur 85. Keglesnitfladen

$$\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}\}$$

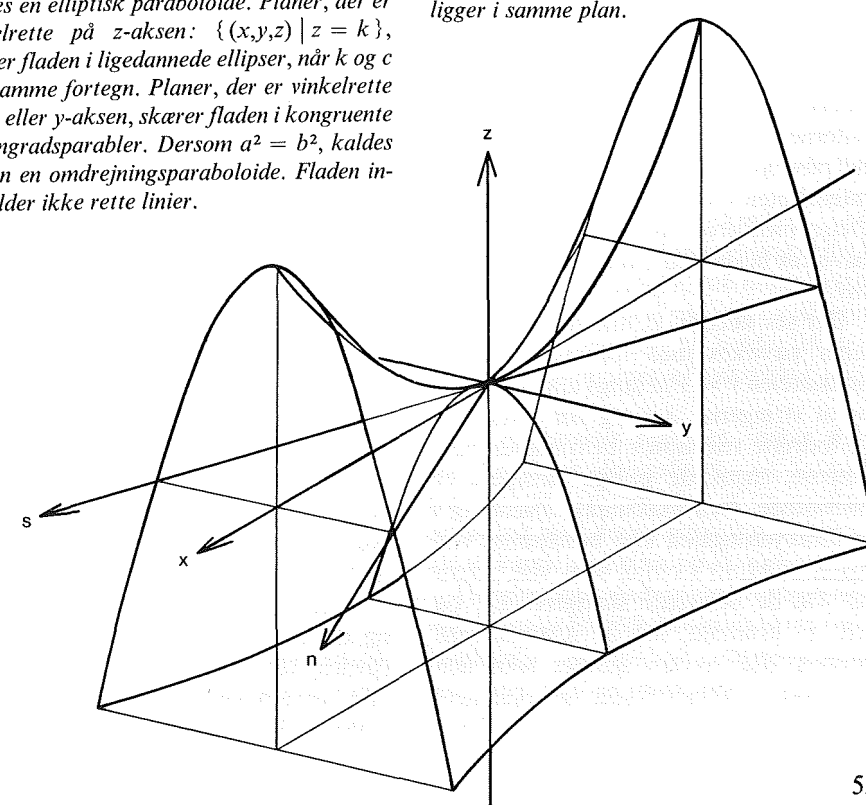
kaldes en hyperbolsk paraboloid. Planer, der er vinkelrette på z -aksen: $\{(x,y,z) \mid z = k\}$, skærer fladen i hyperbler. For $k = 0$ udarter hyperblen til to rette linier, som benævnes n - og s -akserne. Planer, der er vinkelrette på x -aksen, skærer fladen i kongruente andengradsparabler, og planer, der er vinkelrette på y -aksen, skærer fladen i et andet system af kongruente andengradsparabler. Gennem ethvert punkt på fladen går to rette linier, hvis projektioner på x - y -planen er parallelle med henholdsvis n - og s -aksen. Den hyperbolske paraboloid indeholder således to systemer af rette linier. To linier af samme system ligger vinkelret, mens to linier af modsat system ligger i samme plan.



Figur 84. Keglesnitfladen

$$\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}\}$$

kaldes en elliptisk paraboloid. Planer, der er vinkelrette på z -aksen: $\{(x,y,z) \mid z = k\}$, skærer fladen i lignedannede ellipser, når k og c har samme fortegn. Planer, der er vinkelrette på x - eller y -aksen, skærer fladen i kongruente andengradsparabler. Dersom $a^2 = b^2$, kaldes fladen en omdrejningsparaboloid. Fladen indeholder ikke rette linier.



Eksempel 25. Hyperbolske paraboloider, parabelformede kanter

Den hyperbolske paraboloider i figur 85 tænkes skåret med to planer, som er parallelle med z - x -planen, og to planer, som er parallelle med z - y -planen. Herved snittes en dobbeltkrum skive løs, hvis projektion på x - y -planen er rektangulær. Skivens sider består af to par parabelstykker. Disse stykker er parvis kongruente og ens orienterede («parallelle»).

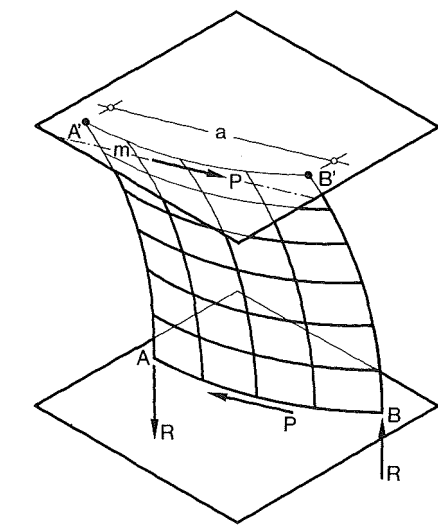
Skiven tænkes anvendt som vægskive, idet det ene sæt afskærende planer vælges som dækskiver. Figur 86 viser den dobbeltkrumme vægskive, som forbinder de to plane dækskiver, der forudsættes at være vandrette.

Vægskiven inddeles i et maskenet ved at skære den med planer, som er parallelle med de afskærende planer. Herved opstår to systemer af kongruente og ens orienterede parabelstykker, et vandret og et lodret system. Langs disse parabelstykker tænkes indlagt stringere, og stringerne tænkes placeret så tæt, at forskydningsfelterne mellem dem kan antages at være plane parallelogrammer.

Skivens to nederste hjørner, A og B , tænkes understøttet lodret, mens hele den nederste kant naturligvis er understøttet i vandret retning af dækskiven. Den øverste dækskive tænkes påvirket med en vandret kraft P , som i første omgang forudsættes at angribe langs linien m , bestemt ved Bredt's formel anvendt på buestykket $A'B'$.

En statisk tilladelig fordeling af forskydningskræfterne mellem vægskiven og øverste dækskive er da en fordeling med konstant intensitet $v = P/a$ langs hele buestykket $A'B'$, hvor a er korde-længden $A'B'$. Ligevægtsbetingelserne for hvert forskydningsfelt i øverste række kræver da, idet alle forskydningsfelterne er parallelogrammer, at hvert felt påvirkes af forskydningskræfter med intensiteten $v = P/a$ langs alle fire sider. Dette medfører, at også næste række påvirkes langs den øverste kant med v , osv.

Det ses således, at alle forskydningsfelter påvirkes med forskydningskraftintensiteten $v = P/a$ langs alle fire sider, og at stringerne AA' og BB' overfører de lodrette reaktioner til forskydningsfelterne, mens de øvrige stringere er ubelastede. Den maksimale spænding i et forskydningsfelt kan bestemmes ved hjælp af Mohr's cirkel som vist i figur 62. Da de belastede stringere AA' og BB' er krumme, må de afstives med bjælker eller skiver, ganske som den »liggende« cylinderflade, se eksempel 22.



Figur 86. Vægskive af form som en hyperbolsk paraboloider, begrænset af parabler, som ligger i vandrette og lodrette planer. Skiven er simpelt understøttet i punkterne A og B og påvirkes af en vandret enkeltkraft P i øverste dækskive.

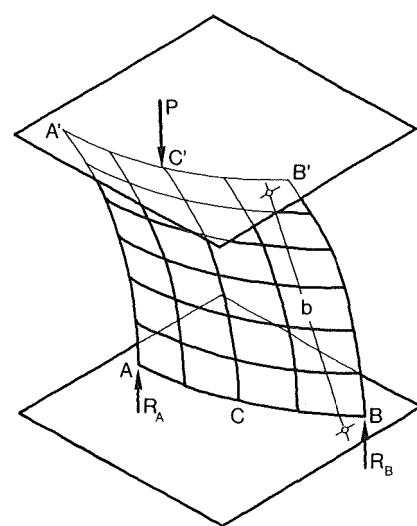
Vægskiven inddeles i forskydningsfelter, adskilt af parabelformede stringere i lodrette og vandrette planer. Forskydningsfelterne er så små, at de kan regnes plane.

En fordeling af forskydningskræfter langs forskydningsfelternes kanter, som har samme intensitet $v = P/a$ langs alle kanter i hele vægskiven, viser sig at tilfredsstille ligevægtsbetingelserne, hvis P angriber i en ganske bestemt linie.

Denne fordeling indebærer, at der ikke kommer bøjningspåvirkning af forskydningsfelter, og at der kun kommer stringerkræfter – og dermed bøjningspåvirkninger – i stringer AA' og BB' . Hvis vægskivens lodrette kanter afstives mod bøjning, kan den dobbeltkrumme vægskive derfor optage visse vandrette kræfter i den øverste dækskives plan.

Det bemærkes, at de lodrette reaktioner R suppleres med vandrette komponenter R' og R'' i dækkene, således at resultanterne af R , R' og R'' kommer til at ligge i de »Bredtske linier« for buestykkerne AA' og BB' . Modsat påvirkes den øverste dækskive derfor af vandrette aktioner R' , beliggende i dækkets skæringslinier med de lodrette afskærende planer gennem hhv AA' og BB' . Størrelsen af disse aktioner kan bestemmes som vist i eksempel 23 (figur 76 øverst). Deres tilstedeværelse medfører, at resultanterne af de kræfter, som den krumme skive og dens kantbjælker påvirker øverste dæk med, ligger i en linie s , der er parallel med m , men forskudt hen imod eller hen forbi linien $A'B'$.

Linien s , hvis afstand fra linien m viser sig at være lig den vandrette afstand fra korden BB' til den tilsvarende Bredtske linie, er den krumme vægskivens støtte-linie for øverste dækskive.



Figur 87. Samme konstruktion som i figur 86, men påvirket af en lodret enkeltkraft.

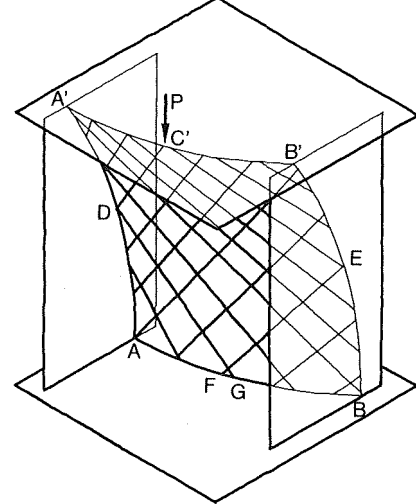
En fordeling af forskydningskræfter langs forskydningsfelternes kanter, som har samme intensitet langs alle kanter til venstre for CC' og samme intensitet langs alle kanter til højre for CC' viser sig at tilfredsstille ligevægtsbetingelserne, hvis der tilføjes visse vandrette kræfter i dækskiverne.

Vægskiven kan derfor optage den lodrette kraft og overføre den til understøtningerne i A og B , hvis dækskiverne fastholdes mod vandrette bevægelser (hvortil den krumme vægskive selv kan medvirke), og hvis stringerne AA' , BB' og CC' afstives mod bøjning.

Vægskiven tænkes nu påvirket af en lodret kraft P , se figur 87. Denne last medfører lodrette reaktionskomponenter R_A og R_B samt forskellige vandrette reaktionskomponenter i dækkene.

Kraften P tænkes overført til forskydningsfelterne via stringer $C'C$, som må afstives, da den er krum. Tilsvarende tænkes reaktionerne R_A og R_B overført til forskydningsfelterne via stringerne AA' og BB' , som ligeledes må afstives.

Forskydningsfelterne i området $AA'C'C$ forudsættes påvirket med en konstant forskydningskraftintensitet v_1 langs alle fire sider. Tilsvarende forudsættes alle forskydningsfelter i området $CC'B'B$ påvirket af v_2 langs alle kanter. Det medfører, at alle forskydningsfelter er i ligevægt, at alle andre stringere end AA' , BB' og CC' er upåvirkede, og at de tre nævnte stringere påvirkes af forskydningsfelterne med forskydningskræfter, hvis resultanter er hhv $V_a = v_1 \cdot b$, $V_b = v_2 \cdot b$ og $V_c =$

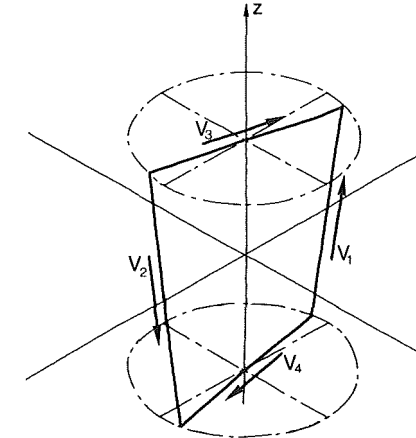


Figur 88. Vægskive af form som en hyperbolsk paraboloider, begrænset af plane skiver langs alle fire sider og påvirket af en lodret enkeltkraft P . Vægskiven er her inddelt med rette stringere, hvorved forskydningsfelterne bliver vindskæve. Kraften kan dog optages alene som stringerkræfter i de rette stringere, hvis de afskærende skiver samt punkterne F og G er understøttet lodret, hvis den øverste dækskive som her er fastholdt mod vandrette bevægelser, og hvis trykstringerne har tilstrækkelig stivhed mod udbøjning til at kunne optage de aktuelle trykkræfter ved søjlevirkning.

$(v_1 + v_2) \cdot b$. Den videre fremgangsmåde ved snitkraftberegningen er helt analog til beregning af en »liggende« cylinderflade med lodret last, se eksempel 23.

Hvis vægskivens nederste kant er understøttet lodret i hele sin længde, fx af et fundament, kan kraften P føres direkte gennem den krumme stringer $C'C$ til fundamentet. Herved opstår der bøjningsmomenter i denne stringer, som altså må afstives (dimensioneres for bøjning). Hvis endvidere vægskivens lodrette kanter er forbundet med afskærende skiver, kan der dog også opstilles en anden model for kraftoptagelsen.

Som omtalt i forbindelse med figur 85 indeholder den hyperbolske paraboloider to sæt rette linier. Der tænkes indlagt et system af rette stringere langs disse rette linier, se figur 88. Kraften P tænkes drejet hen i planet $DC'E$ ved tilførelse af en vandret kraft i det øverste dæk. Herefter opløses kraften i komponenter langs stringerne $C'D$ og $C'E$,



Figur 89. Vindskævt forskydningsfelt med rette kanter. Forskydningsfeltet er ikke i ligevægt, når det alene påvirkes af kræfter i kanternes længderetninger som vist, idet alle kræfterne har en komponent i x -aksens positive retning.

som altså bliver trykstringere. I punkt D opløses stringerkraften i en komponent i den afskærende vægskive, hvis nederste del herved trykpåvirkes, og en komponent i stringer DG , som bliver en trækstringer. Tilsvarende kommer der tryk i den nederste del af den afskærende vægskive ved E , og stringer EF får træk.

Det ses således, at kraften kan optages alene ved stringerkræfter i rette stringere. Det må dog understreges, at snitkraftfordelingen er statisk tilladelig, men at der ikke er foretaget nogen vurdering af, om fordelingen tilfredsstiller de geometriske og fysiske betingelser, dvs om den forudsatte snitkraftfordeling kan nås, uden at der opstår ødelæggende deformationer i skiven.

Vindskæve forskydningsfelter

Det valg af stringersystem, som er benyttet i slutningen af eksempel 25, medfører at forskydningsfelterne mellem

stringerne bliver vindskæve. Det skal nu vises, at et vindskævt forskydningsfelt ikke kan overføre forskydningskræfter ved skivevirkning alene.

På figur 89 er vist et vindskævt forskydningsfelt med rette kanter, påvirket af forskydningskræfterne V_1 , V_2 , V_3 og V_4 langs kanterne. Ved projektion af kræfterne på x -aksen ses det, at alle fire forskydningskræfter giver positive bidrag, således at projektionssummen bliver forskellig fra nul. Forskydningsfeltet kan derfor kun være i ligevægt, hvis det foruden af V_1 , V_2 , V_3 og V_4 også påvirkes af kræfter i x -aksens negative retning (skråt bagud mod venstre). Da forskydningsfeltet kun forudsættes påvirket på kanterne, skal enten to modstående eller alle 4 kanter påvirkes af snitkraftkomponenter på tværs af deres retning. Sådanne snitkræfter kan ikke »komme fra« naboforskydningsfelterne, da disse selv skal påvirkes af tværkræfter i x -aksens negative retning. Kræfterne må derfor »komme fra« stringerne, som således påvirkes til bøjning. Da stringerne kan placeres vilkårligt tæt, optræder der derfor bøjningspåvirkninger overalt i et vindskævt, kraftpåvirket forskydningsfelt.

For rektangulære, vindskæve forskydningsfelter kan bøjningspåvirkningernes størrelse bestemmes på følgende måde.

Forskydningsfeltets vridning w defineres som vinkelændringen pr længdeenhed, det vil fx sige vinklen mellem V_1 's og V_2 's projektioner på z - x -planen, målt i rent tal og divideret med afstanden $2y$ mellem V_1 og V_2 . Hvis w bestemmes som vinklen mellem V_3 's og V_4 's projektioner på x - y -planen, divideret med $2z$, fås samme resultat. Hvis fladens ligning i det viste koordinatsystem kendes, kan w bestemmes som

$$w = \frac{d^2x}{dydz}$$

Benævnes forskydningskraften pr længdeenhed langs forskydningsfeltets kanter som sædvanlig v , kan intensiteten p af den last, der skal påføres i x -aksens negative retning for at holde feltet i ligevægt, bestemmes af udtrykket $p = 2vw$.

Da denne last mangler, virker det, som om forskydningsfeltet – og dermed hele skiven – er påvirket af en modsat rettet last med denne intensitet, og overalt virkende vinkelret på skiveplanet.

Herefter kan pladesnitkræfterne i skiven i mange tilfælde bestemmes med tilstrækkelig nøjagtighed, idet elementet betragtes som en plade med de randbetingelser, konstruktionen giver den.

Eksempel 26.

Hyperbolsk paraboloid, retlinede kanter

Den hyperbolske paraboloid i figur 85 tænkes skåret med to planer, som er parallelle med z - n -planen, og to planer, som er parallelle med z - s -planen. Her ved snittes en dobbeltkrum skive løs, hvis sider er rette, og hvis projektion på x - y -planen er et parallelogram. Hvis parametrene a og b i paraboloidens ligning er lige store, altså hvis paraboloiden »krummer lige stærkt til begge sider«, er n og s -akserne vinkelret på hinanden, og skivens projektion på x - y -planen er et rektangel.

Denne udformning af en hyperbolsk paraboloidflade er ofte anvendt, fordi støbeformen relativt nemt kan fremstilles af lige brædder, som følger skivens kanter.

Skiven tænkes her anvendt som vægskive, idet det ene sæt afskærende planer vælges som dækskiver. Figur 90 viser den dobbeltkrumme vægskive, som forbinder de to plane dækskiver, der forudsættes at være vandrette. Vægskivens to nederste hjørner, A og B , tænkes understøttet lodret, mens hele den nederste kant er understøttet vandret dækskiven.

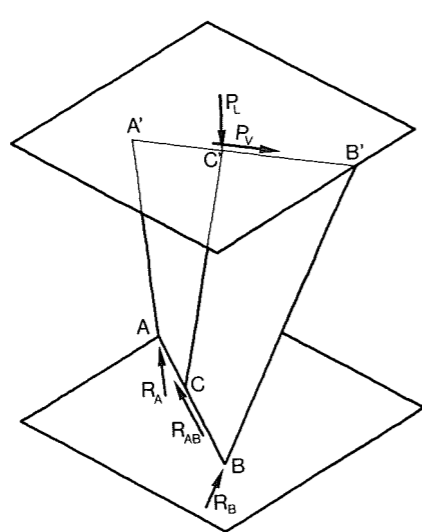
Hvis væggen tænkes påvirket med en vandret kraft, P_V , kan hele væggen opfattes som ét stort forskydningsfelt. Men da dette felt er vindskævt, kan væggen ikke overføre kraften til den underste dækskive, med mindre væggen er således udformet og armeret, at den kan modstå de bøjningspåvirkninger, der bliver tale om.

Hvis væggen tænkes påvirket med en lodret kraft, P_L , kan denne som sædvanlig tænkes overført til forskydningsfelterne via stringeren $C'C$, som jo er ret. Men her kniber det igen at få kraften overført til stringerne AA' og BB' , da forskydningsfelterne er vindskæve.

Hvis væggens nederste kant AB er lodret understøttet i hele sin længde, ses det, at lodret last på væggens øverste kant kan føres direkte ned til understøtningen via rette stringere, der naturligvis da må armeres som søjler.

Eksempel 27. Hyperboloide med ét net

Hyperboloiden i figur 82 tænkes skåret med to planer, som er parallelle med x - y -planen, og to planer, som indeholder z -aksen. Herved snittes en dobbeltkrum skive løs, hvis ene sæt modstående sider er ligedannede og ens orienterede ellipsestykker, mens det andet sæt sider er hyperbelstykker. Skiven inddeles i forskydningsfelter ved at skære den med planer, som er parallelle med x - y -planen,



Figur 90. Vægskive af form som en hyperbolsk paraboloid, begrænset af rette linier. Vægskiven er simpelt understøttet i punkterne A og B og påvirkes foroven af vandrette og/eller lodrette kræfter. Hvis skiven inddeles i forskydningsfelter ved hjælp af stringere, der følger skivens kanter, bliver alle forskydningsfelterne vindskæve, således at kræfterne ikke kan overføres til understøtningerne i A og B , uden at forskydningsfelterne påvirkes til bøjning.

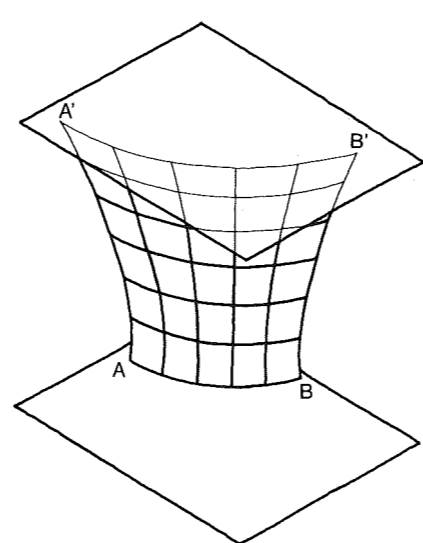
hhv indeholder z -aksen. Inddelingen gøres så tæt, at felternes sidelinier kan antages at være rette.

Figur 91 viser skiven, anvendt som vægskive mellem to vandrette dækskiver, som er parallelle med x - y -planen.

Et bælte bestående af en vandret række forskydningsfelter betragtes. Bæltet begrænses foroven og forneden af ligedannede og ensliggende ellipser. Da de lodrette stringere endvidere antages at være rette på strækningen bæltets højde, udgør bæltet en kegleflade, og forskydningsfelterne er plane trapezer.

Som vist i eksempel 24 er bæltet i ligevægt, når det påvirkes af en konstant forskydningskraft pr længdeenhed langs den øverste kant, en anden konstant forskydningskraft pr længdeenhed langs den nederste kant og varierende forskydningskræfter pr længdeenhed langs de lodrette kanter, og når intensiteterne er $v = k/2u^2$, hvor u er afstanden til keglefladens toppunkt.

Herefter kan skiven behandles helt analogt til den hyperbolske paraboloid i eksempel 25, blot med den forskel, at de lodrette stringere, som skal overføre lodrette kræfter eller reaktioner til forskydningsfelterne, ikke overfører dem med konstant intensitet. Beliggenheden af stringerkræfternes resultanter bliver derfor lidt besværligere at bestemme, da Bredt's formel ikke kan benyttes på de lodrette stringere. Tilsvarende bliver beliggenheden af støttelinien vanskeligere at bestemme.



Figur 91. Vægskive af form som en hyperboloideflade med ét net, begrænset af ellipser i vandrette og hyperbler i lodrette planer. Vægskiven er simpelt understøttet i punkterne A og B og tænkes påvirket via den øverste dækskive af vandrette og/eller lodrette kræfter, der ikke er vist.

Hvis skiven inddeles i forskydningsfelter som vist, kan hvert af de vandrette bånd betragtes som et udsnit af en kegleflade. Hvis der endvidere foretages en lodret opdeling ved hjælp af de stringere, der udgår fra understøtningerne og fra eventuelle lodrette enkeltkræfters angrebepunkter, optræder der i hvert af disse lodrette felter et antal vandrette bånd af kegleflader. Disse kegleflader er i ligevægt uden påførsel af andre kræfter end forskydningskræfter fra de nævnte stringere samt ensformigt fordelte forskydningskræfter fra dækkene, virkende langs vægskivens øverste og nederste kanter.

Den hyperboloideformede vægskive kan derfor optage vandrette og lodrette enkeltkræfter under samme betingelser som gælder for øvrige krumme skiver, nemlig understøtning af dækskiverne, så de er vandret ubevægelige, samt afstivning af krumme stringere, der udgår fra kraftangrebepunkter.

Men i hvert tilfælde ses det umiddelbart, at væggen kan overføre vandrette og lodrette enkeltkræfter fra øverste til nederste dækskive, når de vandrette kræfter angriber i støttelinien, som ligger »i nærheden af« væggens spor i dækket, når de lodrette kræfter angriber i væggens spor i dækket, og når de lodrette stringere, der udgår fra angrebepunkterne for lodrette kræfter og reaktioner, er afstivede af lodrette, afskærende skiver eller bjælker.

De øvrige dobbeltkrumme keglesnitflader kan behandles på helt tilsvarende måde, når de afskærende dækskiver vælges på følgende måde: Hyperboloiden med to net (figur 83) – dækskiver vinkelrette på x -aksen. Den elliptiske paraboloid (figur 84) – dækskiver vinkelrette på z -aksen. Ellipsoiden (figur 81) – dækskiver vinkelrette på en af akserne.

Krumme fladers anvendelighed som kraftoverførende skiver

Kraftoverførende skiver kan opdeles i forskellige funktionstyper efter deres understøttings- og lastgeometri. Figur 92 viser et antal forskellige typer, som kan være plane, enkeltkrumme eller dobbeltkrumme skiver. De viste skiver tænkes her for simpelhed skyld anvendt som vægskiver mellem to plane, vandrette dækskiver, men de kan naturligvis også anvendes som fx tagskiver mellem plane, parallelle vægskiver.

I alle skiverne tænkes indlagt et stringersystem, som »følger« skivens kanter.

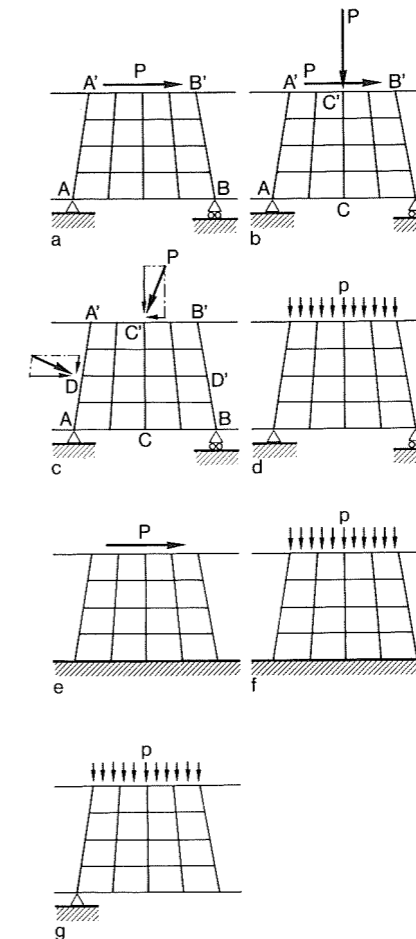
For de simpelt understøttede skivers vedkommende medfører alle de viste lasttilfælde, at kræfterne overføres til understøtningerne ved forskydningsfelternes hjælp, idet kræfterne overføres til og fra forskydningsfelterne via stringere. For de indspændte skivers vedkommende kan lodret last overføres direkte ad stringerne til understøtningen, mens vandret last kræver forskydningsfelternes medvirken.

Når forskydningsfelter skal medvirke uden at udsættes for bøjningspåvirkninger, må de ikke være vindskæve. Det vil sige, at man ved en passende fin inddeling af skiven skal kunne få et tilstrækkeligt antal plane, firkantede forskydningsfelter. Dette kan normalt opnås ved at vælge en regelmæssig fladegeometri, og samtidig sørge for, at skivens fire hjørner ligger i samme plan.

Normalkraftpåvirkede stringere skal enten være rette eller afstivede. Hvis forskydningsfelterne skal være plane, bliver det ene sæt stringere krumme ved enkeltkrumme skiver, mens begge sæt stringere bliver krumme ved dobbeltkrumme skiver. Hvor der skal optages enkeltkræfter (bjælkevederlag, krydsende skiver, understøtningsreaktioner), kan krumme stringere afstives med en skive eller bjælke. Hvor der derimod skal optages en fordelt last (fx ved pladevederlag), bør stringerne være rette.

Der må således stilles de i tabel 1 viste betingelser til de funktionstyper, der er vist i figur 92, hvis kræfterne skal optages ved skivevirkning alene. Hvor der kræves plane forskydningsfelter, er det forudsat, at forskydningsfelterne er enten parallelogrammer eller trapezer med fast toppunkt i hver række, således at der ikke opstår »interne« stringerkræfter.

I slutningen af eksempel 25 er vist, hvorledes der kan opstilles andre muligheder for kraftoverførelse ved at vælge et stringersystem, som ikke følger skivens kanter. Ved valg af stringersystem



Figur 92. Skiver med forskellige funktioner i understøttings- og lastmæssig henseende.

a...d: simpelt understøttede skiver
e og f: indspændte skiver
g: udkraget skive

De viste skiver forudsættes placeret mellem to parallelle skiver. For at simplificere beskrivelsen tænkes disse parallelle skiver at være vandrette dækskiver. Det forudsættes endvidere, at begge dækskiver er fastholdt mod enhver bevægelse i det vandrette plan. Vægskiven kan deltage i fastholdelsen af den øverste dækskive, hvis den opfylder kravene til funktionstype a eller e. De viste funktioner kan opfyldes af både plane og krumme vægskiver, jf tabel 1 og 2.

Funktions-type	Krav til forskydningsfelter	Krav til stående stringere	Krav til vandrette stringere	Eksempler på egnede skiveformer, jf tabel 2
a	plane	AA' og BB' rette eller afstivede	–	1 – 2 – 3 4 – 5 – 6
b	plane	AA' , BB' og CC' rette eller afstivede	–	1 – 2 – 3 4 – 5 – 6
c	plane	AA' , BB' og CC' rette eller afstivede	DD' ret eller afstivet	1 – 2 – 3 4 – 5 – 6
d	plane	rette	–	1 – 2
e	plane	mindst to rette eller afstivede	–	1 – 2 – 3 4 – 5 – 6
f	–	rette	–	1 – 2 – 7
g	plane	rette	–	1 – 2

Tabel 1. Oversigt over, hvilke skiveformer der kan opfylde forskellige kraftoverførende funktioner. Kolonnen »Funktionstype« refererer til figur 92.

1	Plan skive
2	Cylinder- eller kegleflade, hvis frembringere spænder fra dæk til dæk, begrænset af et par frembringere og et par vandrette, afskærende planer
3	Cylinderflade med vandrette frembringere, begrænset af et par parallelle, afskærende planer og et par frembringere
4	Hyperbolsk paraboloid, begrænset af to par »parallelle« parabler
5	Hyperboloide eller paraboloid med lodret »omdrejningsakse«, begrænset af et par afskærende planer, som indeholder »omdrejningsaksen«, og et par afskærende planer, som står vinkelret på denne akse
6	Ellipsoide med en lodret akse, begrænset af et par afskærende planer, som indeholder den lodrette akse, og et par afskærende planer, som står vinkelret på denne akse
7	Hyperboloide med ét net eller hyperbolsk paraboloid, begrænset af to par rette linier

Tabel 2. Nogle til skiveformer nævnt i tabel 1's sidste kolonne.

må det dog erindres, at stringermetoden kun giver en *statisk tilladelig spændingsfordeling*, og at det er en forudsætning for metodens og resultaternes anvendelighed i det enkelte tilfælde, at skiven kan tåle de deformationer, der er nødvendige for at den fundne spændingsfordeling kan etableres i praksis. Det må også vurderes, om disse deformationer har andre betydende virkninger; fx kunne man tænke sig, at en ret, trykpåvirket stringer tværbelastes af vindskæve forskydningsfelter, som i modellen forudsættes upåvirkede, men som i praksis må deformeres, hvilket naturligvis ikke kan ske uden påvirkninger.

I den »skæve« stringermodel, som er beskrevet i slutningen af eksempel 25 og vist i figur 88, påvirkes stringer $C'D$ således til tryk, mens stringer EF påvirkes til træk. Hvis man tænkte sig skivens overside påvirket med flere enkeltkræfter eller med en fordelt last, ville parallelle stringere med henholdsvis tryk og træk komme til at ligge endnu tættere sammen. Dette ville nødvendigvis medføre forskydningsdeformationer af nogle af forskydningsfelterne, som jo i dette eksempel er vindskæve.

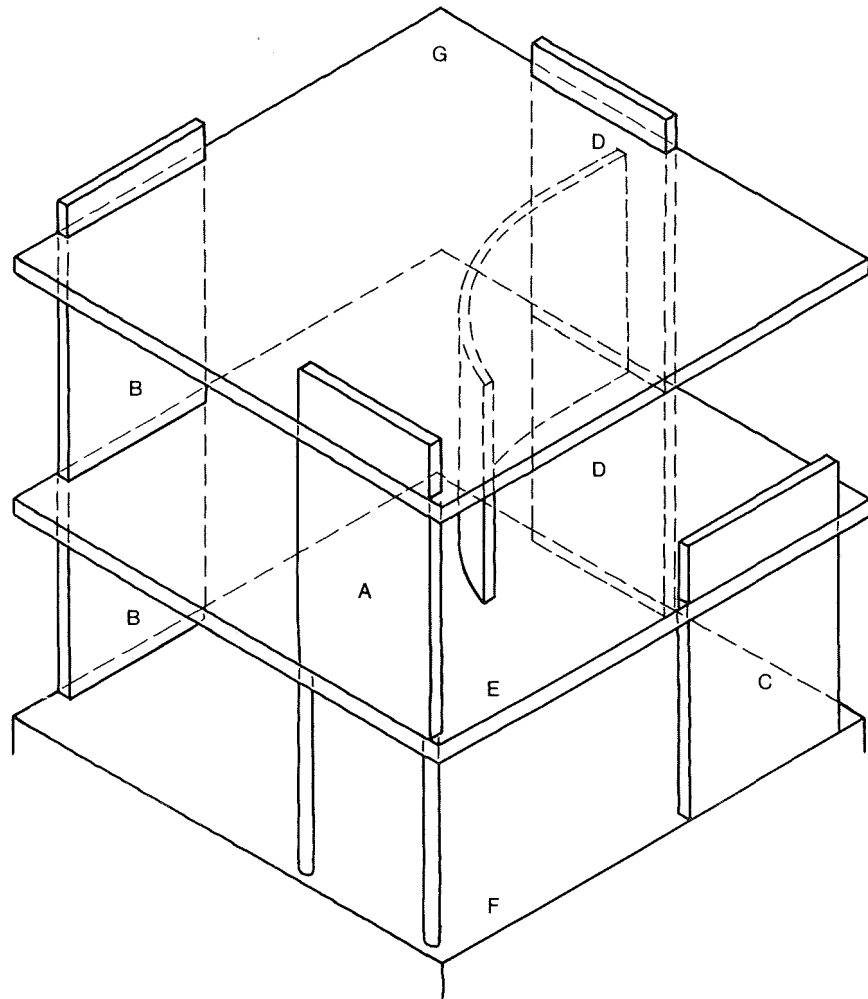
Konflikterne mellem de geometriske og fysiske betingelser ser generelt ud til at være mindre udtalte ved de eksempler, hvor stringersystemet følger vægskivens kanter. Det må derfor i almindelighed tilrådes at anvende sådanne systemer.

Det er nu vist, at ligesom en plan vægskive kan også en krum vægskive under visse betingelser bruges som afstivende konstruktionselement, dvs at udbygningen af den simple, statisk bestemte skivekonstruktion også kan ske med krumme vægskiver som vist i det følgende eksempel.

Eksempel 28. Udkraget, krum vægskive

Figur 93 viser en toetages konstruktion, hvor dækket E over stueetagen er i stabil ligevægt, understøttet af de tre skiver B , C og D , der hver især er indspændte i fundamentplanet F . Dækket G over 1. sal er ligeledes i stabil ligevægt, da det er understøttet af vægskiverne A , B og D .

Ud fra denne konstruktion, der er i stabil ligevægt, kan man bygge videre fx med det formål at reducere spændvidderne, og dermed bøjningsspændingerne i pladerne. Dette kan man opnå ved at indføje ekstra vægskiver, blot man sørger for, at disse nye vægge er støttet af mindst tre støttelinier. På figuren er vist en sådan vægskive af form som en stående cylinderflade, understøttet langs sine spor i skiverne D , E og G .



Figur 93. Toetages skivekonstruktion, som er i stabil ligevægt, også uden den krumme skive. Den krumme skive er udkraget og kan således ikke bidrage til stabiliseringen af

øverste dæk. Den kan derimod reducere dækkens spændvidder og dermed bøjningspåvirkningerne fra dækkens egenvægt og nytte-last.

Krumme skiver med åbninger

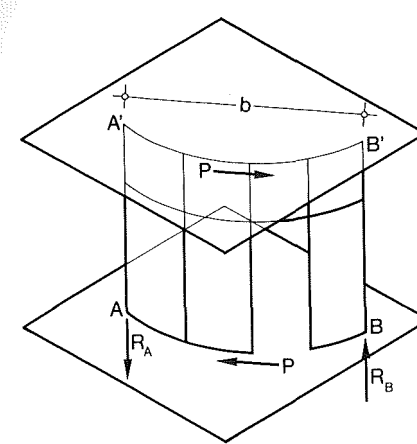
En krum vægskive med en rektangulær åbning kan behandles på tilsvarende måde som en plan vægskive med en åbning, jf eksempel 15 og 16.

Som vist i disse eksempler optræder der stringerkræfter i en sådan skives indre, bl.a. langs åbningens kanter, selv om skiven er påvirket til ren forskydning. I en krum vægskive med en åbning optræder der ligeledes stringerkræfter i både vandrette og lodrette stringere. Da normalt mindst ét af disse stringersystemer består af krumme stringere, optræder der altså også bøjningspåvirkninger, og de pågældende stringere må derfor i princippet afstives. I praksis er bøjningsmomenterne dog ofte så små, at de kan optages af væggen uden særlige foranstaltninger, eller eventuelt blot gennem indlæggelse af ekstra armering.

Eksempel 29. Cylinderformet vægskive med døråbning

Figur 94 viser en krum vægskive af form som en »stående« cylinderflade, der forbinder to plane, vandrette dækskiver. Den øverste dækskive forudsættes støttet af den krumme vægskive samt af to andre vægskiver, således at den er i stabil ligevægt. Den krumme vægskive er forsynet med en døråbning og er lodret understøttet i A og B .

I første omgang forudsættes den krumme vægskives støttelinie for øverste dækskive at ligge i den linie, der fås ved anvendelsen af Bredt's formel på strækningen $A'B'$. Den vandrette last i øverste dækskive forudsættes opløst i komponenter efter støttelinierne, således at den krumme vægskive skal overføre kraften P til nederste dækskive som vist i figur 94.



Figur 94. Cylinderformet vægskive med døråbning, påvirket af kraften P i støttelinien. Der er indlagt et stringersystem, som bl.a. følger døråbningens kanter.

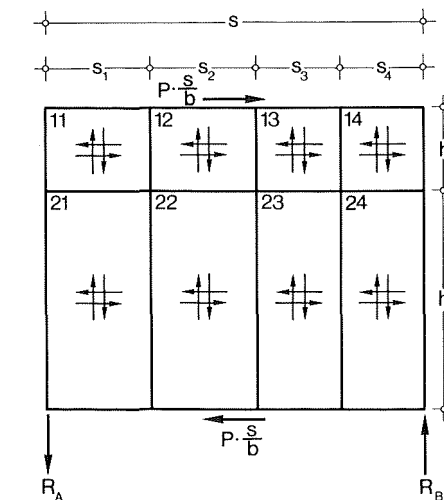
Ved hjælp af en stringermodel af væggen kan der på enkel måde findes en statisk tilladelig spændingsfordeling. Der indlægges som vist fem lodrette og tre vandrette stringere, så der kommer to gange fire forskydningsfelter, hvoraf døråbningen udgør det ene. Forskydningsfelterne nummereres som vist på figur 95.

En statisk tilladelig spændingsfordeling kan fx findes på samme måde som i eksempel 16, nemlig som summen af en basisfordeling og en ændringsfordeling.

Basisfordelingen består af ensformigt fordelte forskydningskræfter med intensiteten $v_0 = P/b$ i alle forskydningsfelter, inklusive åbningen. Ændringsfordelingen, der består af en forskydningskraft pr længdeenhed i hvert felt, kan udtrykkes ved koefficienterne ε_{11} , $\varepsilon_{12} \dots \varepsilon_{24}$, idet forskydningskræfterne pr længdeenhed i ændringsfordelingen udtrykkes som $\varepsilon \cdot v_0$.

Da ændringsfordelingen skal aflaste åbningen, ses straks, at $\varepsilon_{23} = -1$.

I det følgende betragtes kun ændringsfordelingen, som skal være i ligevægt med sig selv. Det vil sige, at *summen* af forskydningskræfterne i ethvert lodret snit skal være nul og *resultanten* af forskydningskræfterne i ethvert vandret snit skal være nul. Mens den første af disse betingelser er endimensional, er den anden todimensional, fordi et vandret snit i skiven er krumt. Der kan altså for det vandrette snit opstilles tre ligevægtsligninger, fx tre momentligninger, se figur 96.



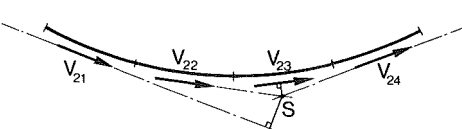
Figur 95. Udfoldning af vægskivens stringermodel. Figuren viser forskydningsfelternes numre og dimensioner samt fortegnstegnet for forskydningskræfter pr længdeenhed.

Med to gange fire forskydningsfelter er ændringsfordelingen således statisk bestemt. Det kan imidlertid ske, at man får en oplagt urimelig spændingsfordeling frem på denne måde, altså en spændingsfordeling, som er i betydelig modstrid med de fysiske og geometriske betingelser, og derfor ligger langt fra elasticitetsteoriens resultat.

Hvis væggen blot har en nogenlunde stor bøjnings- og vridningsstivhed, og en ikke for stor krumning, kan der ses bort fra de momentlige vægte, der er beskrevet i figur 96. Når der kan optræde forskydningskræfter på tværs af væggens plan i vandrette snit, og vridningsmomenter om lodrette akser i de samme snit, kan angrebslinierne for kræfterne $V_{21} \dots V_{24}$ på figur 96 flyttes. Når væggen krumning er lille, vil selv en lille flytning af angrebslinierne få stor indflydelse på resultatet af momentligningerne. Således kan en ændringsfordeling, der er meget forskellig fra den først fundne, være i ligevægt med sig selv gennem tilstedeværelse af relativt små bøjnings- og vridningsmomenter i væggen.

Denne frihed medfører, at ændringsfordelingen kan bestemmes ved fx at betragte væggens udfoldning eller dens projektion på en lodret plan.

De omtalte indre tværkræfter (forskydningskræfter og vridningsmomenter) medfører tilsvarende snitkræfter på øverste dæk, således at reaktionerne på de støttende vægge ændres. Ved overgangen fra øverste til nederste række



Figur 96. Vandret snit i den nederste række forskydningsfelter, påvirket af ændringsfordelingens forskydningskræfter V_{21} , V_{22} , V_{23} og V_{24} , hvor $V_{21} = \varepsilon_{21} \cdot v_0 \cdot s_1$ osv. V_{23} kendes, og V_{21} kan herefter bestemmes ved momentlige vægt om skæringspunktet S for V_{22} og V_{24} . Ved opstilling af momentligninger om andre skæringspunkter kan V_{22} og V_{24} bestemmes på samme måde.

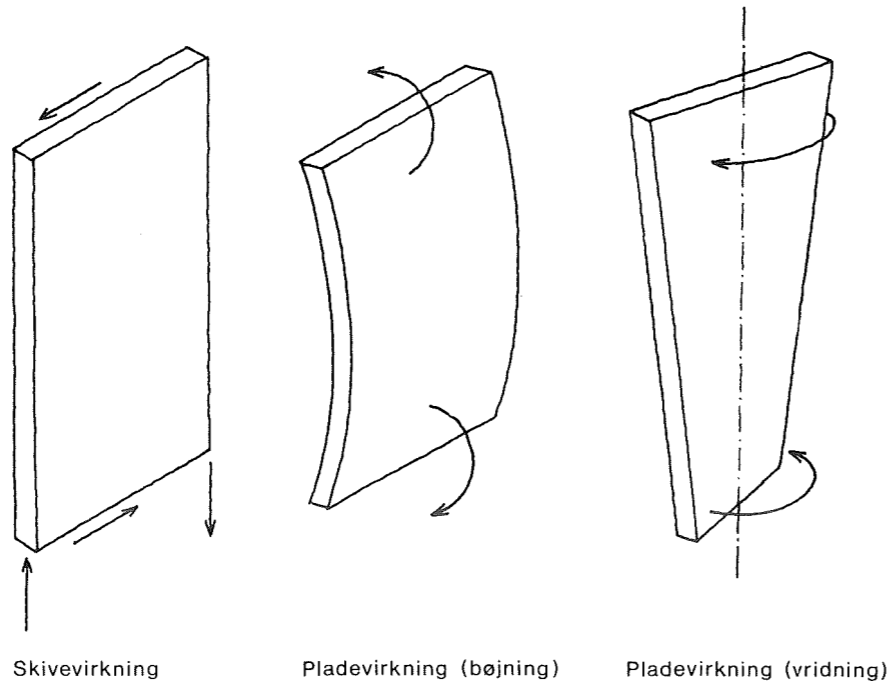
for skydningsfelter ændrer tværkræfterne fortegn (og som regel også størrelse). Dette er ensbetydende med tværpåvirkning af den vandrette, krumme stringer, som derfor påvirkes til bøjning om en lodret akse af både længde- og tværkræfter.

Sammenfatning

Denne SBI-anvisning behandler det teoretiske grundlag for udformning af skivekonstruktioner i stabil ligevægt.

Den plane skive

Det almindeligst anvendte grundelement i en skivekonstruktion er den plane skive, et teoretisk set todimensionalt element, som kan overføre ret store kræfter i sit eget plan, men som på grund af ringe bøjnings- og vridningsstivhed ikke kan overføre væsentlige kræfter vinkelret herpå. Bøjningsstivheden forudsættes dog tilstrækkelig til, at skiven kan optage tryk- og forskydningskræfter af en vis størrelse i sit eget plan uden at folde.

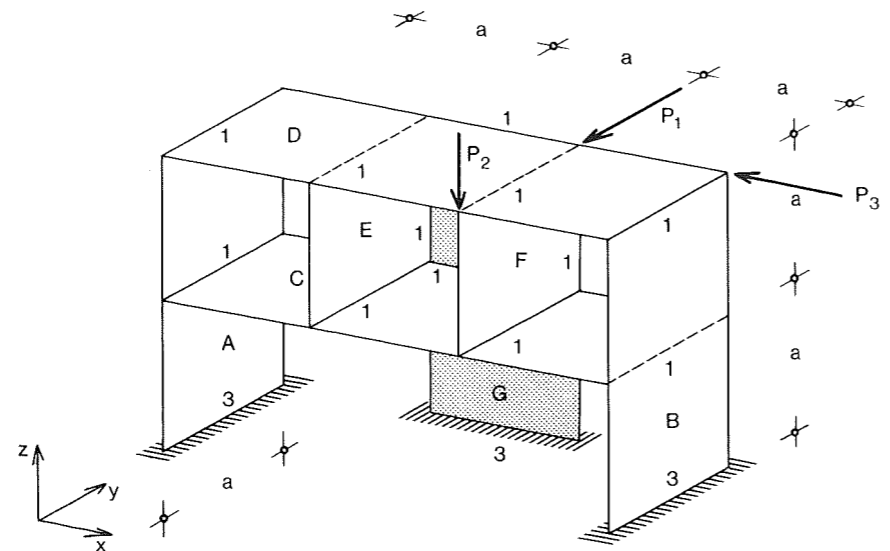


Skivekonstruktioner i stabil ligevægt

En skive tænkes forbundet med sine omgivelser ved hjælp af et eller flere friktionsløse hængsler med akser langs en eller flere af skivens kanter. En enkeltstående, lodret skive, der er understøttet af et sådant hængsel langs sin nederste kant, kan optage en nedadrettet trykkraft, der virker nøjagtigt i skivens plan, men blot en ganske lille tværkraft vil få skiven til at vælte; skiven er i ustabil ligevægt for den givne last. Ved sammenkobling af flere skiver, som opfylder forskellige betingelser mht placering og orientering, kan man opbygge skivekonstruktioner, som er i stabil ligevægt, dvs kan optage kræfter i vilkårlige retninger. Da skiverne forudsættes bøjnings- og vridningsslappe, kan disse kræfter dog ikke virke hvor som helst, men skal teoretisk set virke i skivernes samlings, de såkaldte støttelinier.

Pladevirkning

I praksis overføres de relativt små belastninger, som direkte påvirker den enkelte skive på tværs, til de nærmeste støttelinier ved pladevirkning. De kræfter, der stammer fra den ydre belastning på andre skiver, for hvilke den betragtede skive udgør et led af understøtningskæden, er som regel større, men overføres til gengæld direkte til støttelinierne.



Figur II. En skivekonstruktion, der er i stabil ligevægt. Vægskiverne A, B og G danner sammen med dækskiven C en delkonstruktion i stabil ligevægt. Oven på denne er placeret en tilsvarende konstruktion, skiverne A, B, G

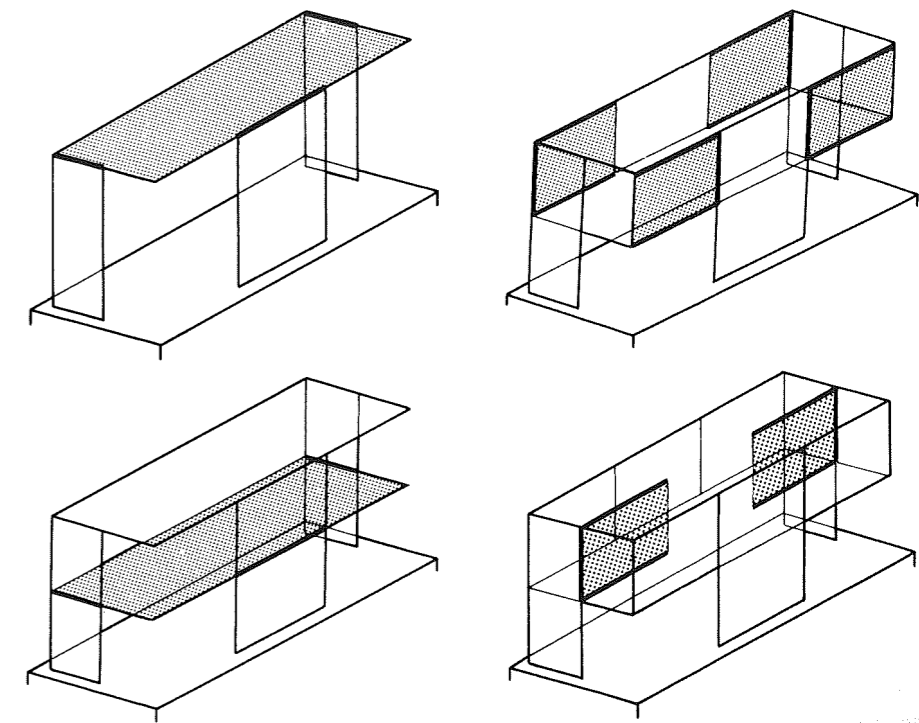
beregning af konstruktionen ses der ved denne helt bort fra skivernes evne til at optage kræfter ved vridning og bøjning.

Analyse af en skivekonstruktion

Som nævnt skal visse betingelser til skivernes placering og orientering være opfyldt, for at skivekonstruktionen er i stabil ligevægt. Analysen af, om dette er tilfældet for en given skivekonstruktion, kan foretages efter to forskellige principper: enten kan man undersøge, om konstruktionen er bevægelig, eller også kan man søge at bestemme snitkræfterne for et antal forskellige lasttilfælde.

Bevægelighed

Undersøgelsen af, om en konstruktion er bevægelig, kan foretages ved hjælp af ræsonnementer, idet man fx tænker sig konstruktionen opbygget successivt af simple grundkonstruktioner, der hver især understøttes, så de er i stabil ligevægt. I mange situationer, både ved analyse af vanskeligt overskuelige konstruktioner, og som et hjælpemiddel i kommunikation med andre, kan man have glæde af en papmodel af konstruktionen.



Figur III. Analyse af en skivekonstruktion. De tre vægskiver danner sammen med øverste dækskive en konstruktion i stabil ligevægt. Nederste dækskive indskydes og er også i sta-

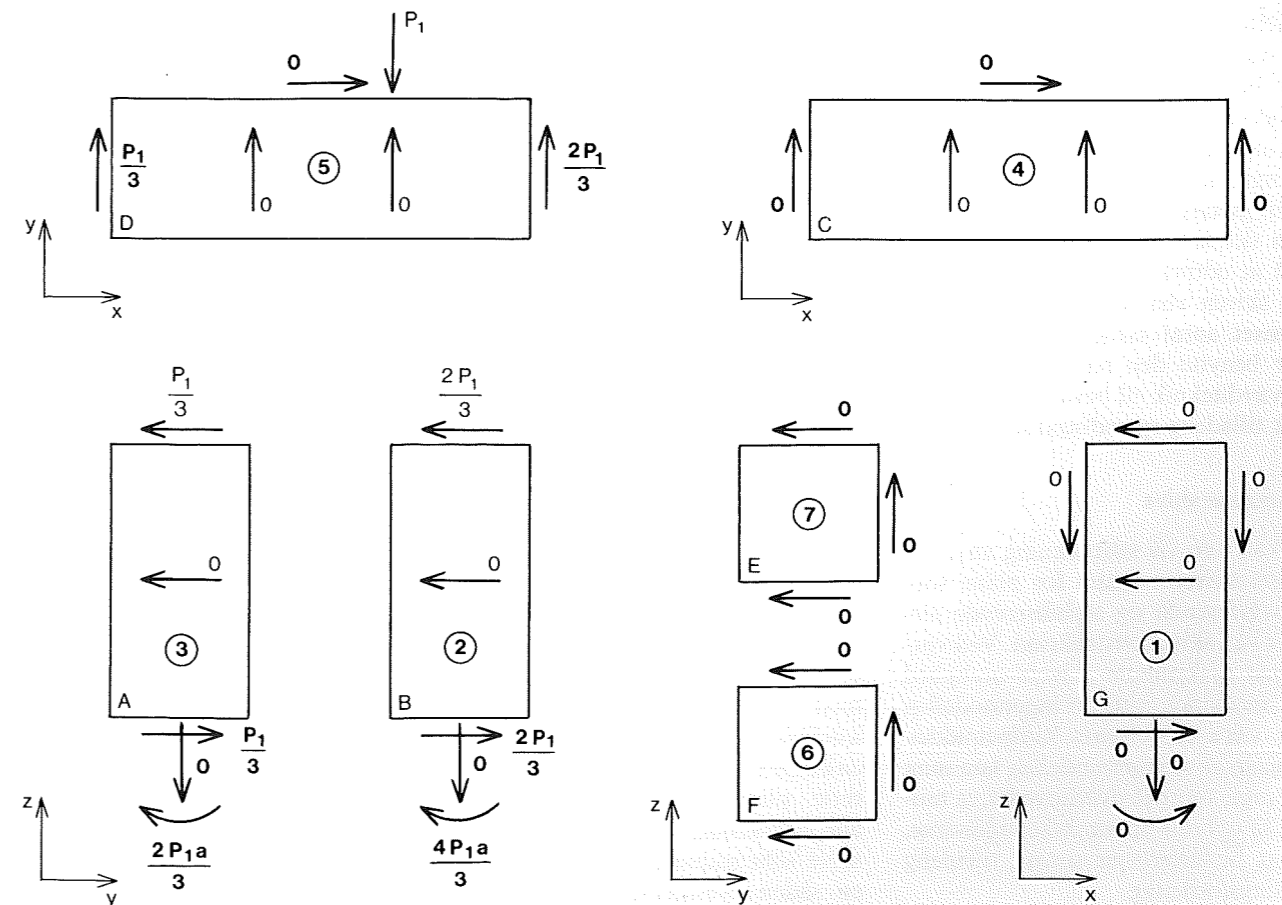
bil ligevægt. Hver af de seks indskudte vægskiver understøttes lodret af en gennemgående vægskive og holdes i øvrigt på plads af dækskiverne.

Snitkræfter

Bestemmelse af snitkræfterne foregår ved successiv løsskæring af de enkelte skiver og opstilling af ligevægtsligninger. Hvis alle ligevægtsligningerne kan

Figur IV. Snitkræfter i skivekonstruktionen i figur II, påvirket af kraften P_1 . Efter at skiverne er snittet løs fra hinanden og påført snitkræfter, opstilles de tre ligevægtsbetingelser for hver skive. De indcirklede tal fra 1 til

7 angiver en mulig opbygningsrækkefølge. Løsning af ligevægtsligninger sker i modsat rækkefølge. Da den afbildede konstruktion er statisk bestemt, medfører denne rækkefølge netop tre ubekendte snitkræfter på hver skive.



og D. Endelig er dækkens spændvidder reduceret ved hjælp af de udkragede vægskiver E og F, der understøttes af skive G og holdes i vandret stilling af dækskiverne C og D.

tilfredsstilles af et eller flere sæt snitkræfter, er konstruktionen statisk bestemt eller statisk ubestemt, og er dermed i stabil ligevægt. Hvis derimod en eller flere af ligevægtsligningerne ikke kan tilfredsstilles, er konstruktionen bevægelig.

Spændinger

I modsætning til, hvad der gælder for snitkræfterne i en statisk bestemt skivekonstruktion, kan spændingsfordelingen i en skive ikke bestemmes ved ligevægtsbetingelser alene; de må suppleres med fysiske og eventuelt geometriske betingelser. Som regel benyttes enten elasticitetsteorien, som giver en éntydig spændingsbestemmelse, eller plasticitetsteoriens nedreværditeknik, hvor man vælger en statisk tilladelig spændingsfordeling, dvs en spændingsfordeling, der opfylder ligevægtsbetingelserne.

Ved valget af en statisk tilladelig spændingsfordeling starter man ofte med at begrænse mængden af mulige fordelinger ved fx at inddele skiven i et antal zoner og kræve konstante spændinger inden for hver zone for sig.

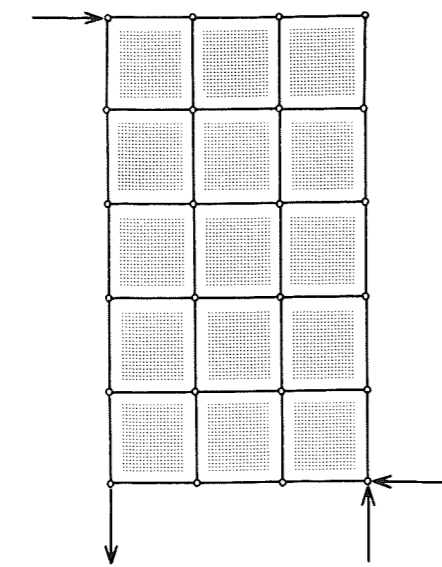
Stringermodellen

Den såkaldte stringermodel er et eksempel på en sådan zoneinddeling. Skiven tænkes opbygget som et skelet af træk- og trykstænger og en hud, bestående af firkantede felter, de såkaldte forskydningsfelter. Da skelettet er et stangsystem, opbygget over et net af firkanter, er det bevægeligt, men det stabiliseres af forskydningsfelterne, som kun regnes at optage forskydningskræfter.

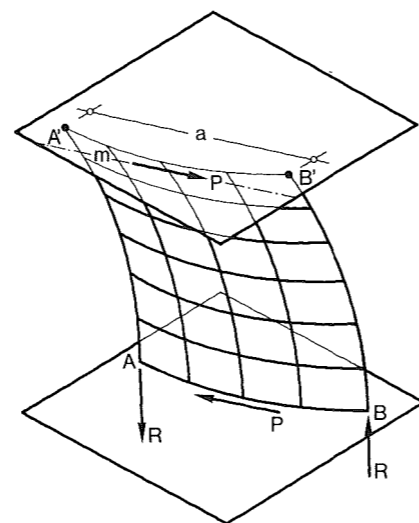
Stringermodellen er ikke nogen egentlig beregningsmetode, men en model for en skives virkemåde, som gør det muligt at udtrykke en spændingsfordeling i skiven ved hjælp af et bestemt, begrænset antal talværdier. Man kan derfor benytte den som en del af en nedreværditeknik til bestemmelse af en statisk tilladelig spændingsfordeling.

Den krumme skive

Man kan i en vis udstrækning anvende krumme skiver i stedet for plane som kraftoverførende og stabiliserende elementer i en skivekonstruktion. Ved vurderingen af krumme skivers mulighed for at medvirke, viser stringermodellen sig at være et velegnet hjælpemiddel. Ved hjælp af stringermodellen kan man undersøge, om det overhovedet er muligt at få opfyldt ligevægtsbetingelserne, altså at bestemme en statisk tilladelig spændingsfordeling.



Figur V. Stringermodel af en simpel, rektangulær skive, påvirket af et kraftsystem i ligevægt, fx en ydre kraft og tre reaktionskomponenter.



Figur VI. Dobbeltkrum vægskive, placeret som afstivende væg mellem to dækskiver. Hvis blot væggenes lodrette kanter A'A og B'B afstives, kan denne dobbeltkrumme skive overføre kraften P fra øverste til nederste dækskive ved ren skivevirkning.

Man må dog altid vurdere størrelsen af de deformationer, der er nødvendige for, at den forudsatte spændingsfordeling kan opstå. Man må endvidere vurdere, om disse deformationer kan foregå, uden at skivematerialet nedbrydes, og uden at der sker lokale stabilitetsbrud i form af foldning eller lignende. Disse spørgsmål er ikke behandlet særlig indgående i anvisningen.

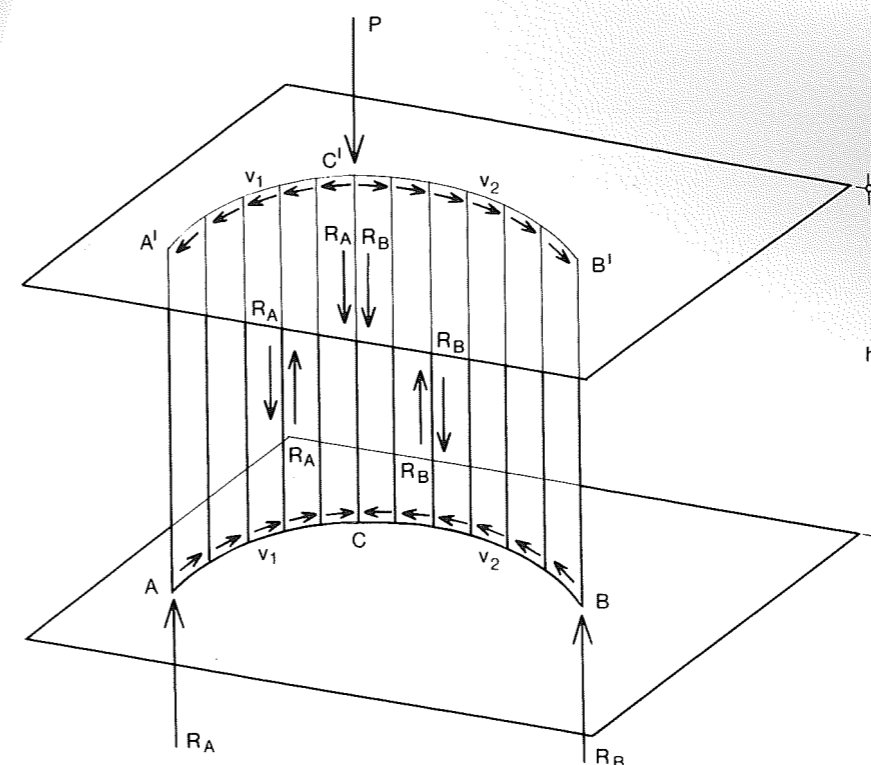
For krumme skivers vedkommende peger anvisningen således på nogle hidtil stort set uudnyttede muligheder, men der må nok forventes at være visse beregningsmæssige og udførelsmæssige spørgsmål tilbage, som må afklares, inden en udnyttelse af krumme skiver i større stil er realistisk.

Krumme skiveformer

Anvisningen beskæftiger sig både med enkeltkrumme skiver (cylinder- og kegleflader) og med dobbeltkrumme skiver (ellipsoider, hyperboloider og paraboloider, herunder kugleflader og hyperbolske paraboloider).

Af størst umiddelbar interesse for praksis er nok vægskiver udformet som »stående« cylinderflader. En vægskive, der er udformet som en cylinderflade med lodrette frembringere og vilkårlig ledelinie (en cylinder behøver ikke være cirkulær), og placeret mellem to vandrette, plane dækskiver, kan i næsten alle henseender erstatte en plan vægskive som stabiliserende element. Hvis en sådan cylindervæg er understøttet

i mere end to punkter af sin underste kant, og hvis den har en passende krumning, kan den endog erstatte et system af plane vægskiver.



Figur VII. Enkeltkrum vægskive, placeret mellem to dækskiver som bærende væg med bjælkefunktion. Trods væggenes krumning kan kraften P overføres til reaktionerne R_A og R_B , hvis blot begge dækskiver er i stabil ligevægt,

dvs fastholdt mod indbyrdes vandrette bevægelser. Denne fastholdelse kræver tre vægskiver, hvoraf den krumme væg selv er den ene.

[1] Bygningsreglement 1972. København. Boligministeriet. 1972. 150 s. A5.

[2] Ren mekanik 1. Ervin Poulsen m.fl. København. Polyteknisk Forlag. 1967. 176 s. A5.

[3] Ren mekanik 2. Ervin Poulsen m.fl. København. Polyteknisk Forlag. 1967. 146 s. A5.

[4] Det danske Institut i Rom. Arkitektur (DK) nr 4. 1970. side 148-158.

[5] Narc-slice. Per O. Kjærbye. Byggeindustrien nr 7. 1971. side 404-409.

[6] Konstruktion af Trætrapper. G. v. Huth. Kjøbenhavn. Rudolph Klein. 1887.

[7] Skitsemodellerne er udført af Otto Kierkegaard, Henning Christensen, Carsten Hansen og Hermann Siegumfeldt (figur 33);
Karsten Pålsson (figur 35).

[8] A method of assessing the static stability of panel type buildings. Bryan Stafford Smith. Proceeding of the Department of Civil Engineering, Volume 53. Southampton. University of Southampton. 1972.

[9] Flächentragwerke. K. Girkmann. 6. opl. Wien. Springer-Verlag. 1963. 632 s.

[10] Om jernbetonskivers styrke. M.P. Nielsen. København. Polyteknisk Forlag. 1969. 253 s. A5.

[11] Brugervejledning for NARC. Et sæt edb-programmer for løsning af opgaver inden for kontinuumsmekanikken ved elementmetoden. København. Statens Byggeforskningsinstitut. 1971. 141 s. A4.

[12] Lærebog i geometri I. Fr. Fabricius-Bjerre. 2. udgave. København. Gjellerup. 1953.

[13] Skivebygninger 1. Statisk bestemte skivekonstruktioner. Egil Borchersen. Forelæsningsnotat nr 38. Lyngby. Institutet for Husbygning, DtH. 1974. 47 s. A4.

Denne SBI-anvisning henvender sig til arkitekter og ingeniører, som udarbejder projektforslag (skitseprojekter) for bygninger. Principperne har relevans for næsten alle bygningstyper, uanset udformning og materialer. Anvisningen beskriver på en lettilgængelig måde, hvorledes plane og krumme skiver kan udnyttes som afstivende elementer, og hvorledes snitkræfter og spændinger i visse simple tilfælde kan beregnes.